

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN  
TE AMSTERDAM

---

PROCEEDINGS

VOLUME XXXVII

No. 4

President: J. VAN DER HOEVE

Secretary: B. BROUWER

---

CONTENTS

In memoriam H. M. Koningin Emma, p. 196.

ERNST COHEN and J. S. BUY: "Ist flüssiges Benzol allotrop?" (Zweite Mitteilung), p. 198.

JAN DE VRIES: "Eine Abbildung einer gewissen Kongruenz kubischer Raumkurven", p. 201.

JAN DE VRIES: "Abbildung einer besonderen Kongruenz von Kegelschnitten auf das Punktfeld", p. 204.

A. A. NIJLAND: "Mittlere Lichtkurven von langperiodischen Veränderlichen. XVIII. R Lyncis", p. 206. (With one plate).

H. J. C. TENDELOO: "Researches on adsorption-electrodes. I. The glass-electrode". (Communicated by Prof. H. R. KRUYT), p. 212.

D. VAN DANTZIG: "On conformal differential geometry. I. The conformal gradient." (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN), p. 216.

H. P. BERLAGE Jr.: "Viscosity and steady states of the disc constituting the embryo of the planetary system". (Communicated by Prof. H. A. KRAMERS), p. 221.

H. J. MAC GILLAVRY: "Some Rudists from the Alta Verapaz, Guatemala." (Communicated by Prof. L. RUTTEN), p. 232. (With one plate).

P. SCHOORL: "Experiments on rats about the part of sodium in metabolism". (Communicated by Prof. G. GRIJNS), p. 239.

C. J. KAMP and C. STUART: "The electric organ and its centres in *Gymnotus electricus*". (Communicated by Prof. C. U. ARIËNS KAPPERS), p. 245.

J. C. L. GODEFROY: "Die Lokalisation von Vibrationsempfindungen bei zunehmendem Druck". (Communicated by Prof. B. BROUWER), p. 253.

---

De voorzitter, Prof. Dr. J. VAN DER HOEVE, opent de vergadering met de volgende toespraak:

M.H.,

Den 20sten Maart is overleden Hare Majesteit de Koningin-Moeder.

Het is hier niet de plaats om de vele voortreffelijke eigenschappen te bespreken, welke deze even hoogstaande als sympathieke vorstin sierden.

Zulks is bovendien ook geheel overbodig, wij beoordeelen de personen naar hun levenswerk en het leven van Hare Majesteit ligt voor ons als een open boek, waarvan elke bladzijde, ja elke regel luide spreekt van hare groote liefde voor het land en het volk, dat zij met haar ruime, warme hart dusdanig als het hare had aangenomen, dat het ons moeite kost te realiseeren, dat de Koningin-Moeder eigenlijk van vreemden bloede was.

Geen wonder dan ook dat het heengaan van Hare Majesteit niet alleen in hare familie en naaste omgeving, maar ook in breede kringen van het Nederlandsche volk een groote leegte veroorzaakt.

Zijn wij door dit verscheiden als Nederlanders getroffen, dubbel zwaar treft het ons als mannen van Wetenschap, omdat het ons bekend is hoe zeer Hare Majesteit ten allen tijde belang in de Wetenschap heeft gesteld.

Menigeen onzer, die in Diligentia in Den Haag, een wetenschappelijke voordracht, bijgewoond door de Koningin-Moeder, had gehouden, zal zich verheugd hebben dat, bij een gesprek na afloop van de lezing, Hare Majesteit door hare woorden blijk gaf niet alleen de voordracht geheel te hebben gevolgd, maar ook dikwerf van het behandelde onderwerp goed op de hoogte te zijn.

De medische wetenschap in het bijzonder heeft veel aan Hare Majesteit te danken. Hare belangstelling voor alles wat de Geneeskunde betrof was schier onbegrensd en wie ooit het voorrecht had bij een bezoek van haar aan een ziekenhuis aanwezig te zijn, weet hoe zeer zij daarbij van alles kennis nam en welk een grooten invloed hare aanwezigheid op de patiënten uitoefende.

In de laatste jaren van haar leven nam de Koningin-Moeder, als Beschermvrouwe, ook aan enkele geneeskundige congressen



deel en alle aanwezigen kwamen daarbij onder den invloed van hare, toch in wezen zoo eenvoudige, persoonlijkheid en voelden dat echte Majesteit van haar uitging.

Nooit zal ik vergeten hoe bij het Internationale Oogheekundige Congres in 1929 mij door meerdere personen in verschillende talen werd gezegd: "If we had such royalty we would not have a republic".

Is het wonder dat een dergelijke persoon leeft en dat hare nagedachtenis zal blijven leven in de harten van het volk, dat zij zoo zeer liefhad?

---

Chemistry. — Ist flüssiges Benzol allotrop? Von ERNST COHEN und J. S. BUY. Zweite Mitteilung <sup>1)</sup>).

(Communicated at the meeting of March 24, 1934.)

*Die Dampfdruckkurve des flüssigen Benzols.*

1. Auch der Verlauf der Dampfdruckkurve des flüssigen Benzols im Temperaturintervall 0—100° C. wurde von MENZIES und LACOSS <sup>2)</sup> bei ihren Betrachtungen über die Allotropie dieser Flüssigkeit herangezogen. Sie schreiben: "On consulting these (International Critical) Tables <sup>3)</sup>, however, in order to find references to the original literature for vapor pressure, we were agreeably surprised to find that the vapor pressures of benzene below two atmospheres were reported in the form of two linear equations, in  $\frac{1}{T}$  and  $\log p$  as variables, which were stated to cover the ranges 0° to 42° and 42° to 100° respectively". Die beiden von den Autoren konstruierten geraden Linien (Fig. 1) schneiden sich nach ihrer

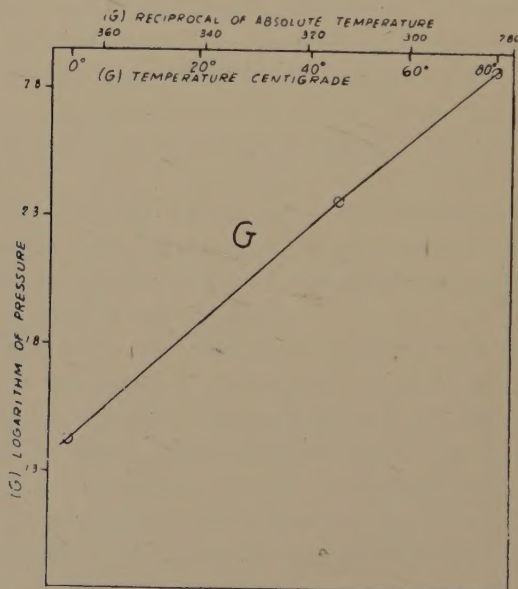


Fig. 1.

Mitteilung bei 45.8° C., d.h. also, dass die Dampfdruckkurve des flüssigen Benzols zwischen 0 und 80° C. einen Knick aufweist.

<sup>1)</sup> Erste Mitteilung: Proc. Acad. Sci. Amsterdam **37**, 55 (1934).

<sup>2)</sup> Proc. Nat. Acad. Sci. **18**, 144 (1932) und unsere erste Mitteilung unter obigem Titel, Proc. Acad. Sci. Amsterdam **37**, 55 (1934).

<sup>3)</sup> International Critical Tables **3**, 215 und 221 (1928).



Wäre dies tatsächlich der Fall, so hätte man auf Allotropie der Flüssigkeit zu schliessen. Wir wollen hier nun kurz die Frage erörtern, ob das von MENZIES und LACOSS verwendete Tatsachenmaterial diesen Schluss rechtfertigt.

2. Nach den Bearbeitern der Dampfdruckdaten des flüssigen Benzols in den International Critical Tables (Vergl. oben § 1.) gelten dafür folgende Gleichungen:

$$\text{Von } 0 \text{ bis } 42^\circ \text{ C.: } \log_{10} p_{\text{mm}} = \frac{-0.05223 \times 34172}{T} + 7.9622 \quad (1)$$

$$\text{Von } 42\text{--}100^\circ \text{ C.: } \log_{10} p_{\text{mm}} = \frac{-0.05223 \times 32295}{T} + 7.6546 \quad (2)$$

in welchen  $p$  der Dampfdruck in mm. Quecksilber und  $T$  die absolute Temperatur darstellt. Sie geben dabei nur an, dass die von ATKINS und WALLACE<sup>1)</sup>, DÉJARDIN<sup>2)</sup>, FERCHE<sup>3)</sup>, KAHLBAUM<sup>4)</sup>, MANGOLD<sup>5)</sup>, TH. W. RICHARDS und SHIPLEY<sup>6)</sup>, SMITH und MENZIES<sup>7)</sup>, TIMMERMANS<sup>8)</sup> und von SIDNEY YOUNG<sup>9)</sup> erhaltenen Versuchsdaten zur Berechnung dieser Gleichungen herangezogen wurden. Die Gleichungen (1) und (2) liefern für die Temperatur des Knickes  $45.8^\circ \text{ C.}$  Die Frage ob es statthaft ist die obigen Kurven festzulegen auf Grund eines so heterogenen Versuchsmaterials wie das hier benutzte, zu welchem Benzolpräparate verwendet wurden, deren chemische Reinheit keineswegs in allen Fällen garantiert und wobei die Genauigkeit der Thermometrie häufig fraglich war, soll hier vorläufig nicht näher erörtert werden.

3. Das von SMITH und MENZIES s.Z. bei ihren Dampfdruckmessungen benutzte Benzol war sorgfältigst auf seinen Schmelzpunkt untersucht worden. Derselbe ergab sich zu  $5.40^\circ \text{ C.}$ , also um ein geringes niedriger als der später von MENZIES und LACOSS<sup>10)</sup> und auch von TH. W. RICHARDS und seinen Mitarbeitern<sup>11)</sup> mit allen Kauteln festgestellte ( $5.49^\circ \text{ C.}$ ).

Wie Tabelle 1 zeigt, lassen sich nun aber die von SMITH und MENZIES<sup>12)</sup>

<sup>1)</sup> J. Chem. Soc. **103**, 1461 (1913).

<sup>2)</sup> Ann. Phys. **11**, 253 (1919).

<sup>3)</sup> Ann. Physik **44**, 265 (1891).

<sup>4)</sup> Z. physik. Chem. **26**, 577 (1898).

<sup>5)</sup> Sitz. Akad. Wiss. Wien **102** (IIA), 1071 (1893).

<sup>6)</sup> J. Am. Chem. Soc. **38**, 989 (1916).

<sup>7)</sup> J. Am. Chem. Soc. **32**, 1448 (1910).

<sup>8)</sup> University of Brussels.

<sup>9)</sup> Sci. Proc. Roy. Dublin Soc. New Ser. **12**, 374 (1909—1910).

<sup>10)</sup> J. Phys. Chem. **36**, 1967 (1932).

<sup>11)</sup> TH. W. RICHARDS and J. W. SHIPLEY, J. Am. Chem. Soc. **36**, 1825 (1914).

TH. W. RICHARDS, E. K. CARVER and W. C. SCHUMB, J. Am. Chem. Soc. **41** 2019 (1919).

<sup>12)</sup> J. Am. Chem. Soc. **32**, 1448 (1910).

TABELLE 1.

Dampfdruck des flüssigen Benzols bei verschiedenen Temperaturen zwischen 65 und 120° C. nach SMITH und MENZIES.

| Temperatur<br>in C° | $p$ in mm<br>beobachtet | $p_2$ in mm<br>nach<br>Gleichung<br>(2) | $p-p_2$<br>in mm. | $p_3$ in mm<br>nach<br>Gleichung<br>(3) | $p-p_3$<br>in mm. | $p_4$ in mm.<br>nach<br>Gleichung<br>(4) | $p-p_4$<br>in mm. |
|---------------------|-------------------------|---|-------------------|---|-------------------|--|-------------------|
| 63.16               | 439.1                   | 434.7                                   | + 4.4             | 439.2                                   | — 0.1             | 437.2                                    | + 1.9             |
| 66.55               | 492.0                   | 487.8                                   | + 4.2             | 491.7                                   | + 0.3             | 490.6                                    | + 1.4             |
| 71.09               | 563.7                   | 567.0                                   | — 3.3             | 570.0                                   | — 6.3             | 570.1                                    | — 6.4             |
| 74.79               | 640.8                   | 639.4                                   | + 1.4             | 641.2                                   | — 0.4             | 642.1                                    | — 1.3             |
| 80.30               | 765.5                   | 761.2                                   | + 4.3             | 760.4                                   | + 5.1             | 762.6                                    | + 2.9             |
| 90.48               | 1031                    | 1035                                    | — 4               | 1028                                    | + 3               | 1032                                     | — 1               |
| 95.67               | 1197                    | 1203                                    | — 6               | 1191                                    | + 6               | 1195                                     | + 2               |
| 100.42              | 1364                    | 1376                                    | —12               | 1358                                    | + 6               | 1362                                     | + 2               |
| 105.97              | 1581                    | 1602                                    | —21               | 1577                                    | + 4               | 1578                                     | + 3               |
| 111.54              | 1820                    | 1858                                    | —38               | 1824                                    | — 4               | 1821                                     | — 1               |
| 119.93              | 2235                    | 2305                                    | —70               | 2253                                    | —18               | 2239                                     | — 4               |

mittels des „Dynamic Isotenscops“ sorgfältigst ausgeführten Dampfdruckmessungen im Temperaturintervall 65—120° C. nicht mittels der Gleichung (2) beschreiben. Wir versuchten deshalb zunächst, ob die von diesen Autoren gefundenen Werte sich mittels einer andern linearen Funktion darstellen lassen. Nach der Methode der kleinsten Quadrate leiteten wir folgende Gleichung (3) ab:

$$\log_{10} p = \frac{-1652.9}{T} + 7.55831 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Die nach dieser Gleichung berechneten  $p$ -Werte findet man in Tabelle 1 in Kolumne 5. Da auch jetzt noch Abweichungen bis etwa 1% vorlagen, versuchten wir das Beobachtungsmaterial von SMITH und MENZIES mittels einer Gleichung darzustellen, die darauf Rücksicht nimmt, dass die latente Verdampfungswärme des Benzols im genannten Temperaturintervall nicht konstant, sondern eine Temperaturfunktion ist. Man findet dann:

$$\log_{10} p = \frac{-2119.5}{T} - 2.9682 \log_{10} T + 16.44369 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Die mittels dieser Gleichung berechneten  $p$ -Werte sind in Kolumne 7 zusammengefasst; diese Gleichung stellt die Beobachtungen etwas genauer dar als Gleichung (3).



4. Es ergibt sich somit, dass es nicht möglich ist die Ergebnisse der Dampfdruckmessungen oberhalb  $65^{\circ}$  C. ohne weiteres mittels einer linearen Funktion zu beschreiben.

Es bleibt zu untersuchen, ob die Werte des Dampfdruckes unterhalb dieser Temperatur (welche bisher nicht nach dem SMITH-MENZIESSchen Verfahren ermittelt wurden) auf der Kurve (4) liegen; sollte dies tatsächlich der Fall sein, so würde der genannte Knick verschwinden. Wir hoffen darauf später zurückzukommen.

### *Zusammenfassung.*

Es wurde darauf hingewiesen, dass es nicht statthaft ist die Dampfdruckkurve des flüssigen Benzols zwischen  $65$  und  $100^{\circ}$  C. als eine Gerade darzustellen. Die Richtigkeit des Schlusses von MENZIES und LACOSS, dass dieselbe zwischen  $0$  und  $80^{\circ}$  C. einen Knick aufweist, ist bisher auf Grund des vorliegenden Versuchsmaterials nicht erwiesen, sodass auch nach dieser Richtung ein Grund für die Annahme der Existenz einer allotropen Form des flüssigen Benzols nicht vorliegt.

VAN 'T HOFF-Laboratorium.

Utrecht, März 1934.

### Mathematics. — Eine Abbildung einer gewissen Kongruenz kubischer Raumkurven. Von JAN DE VRIES.

(Communicated at the meeting of 24 Maart 1934).

§ 1. Die kubischen Raumkurven  $\varrho^3$ , welche durch die festen Punkte  $B_1, B_2, B_3, B_4$  gelegt werden und sich stützen auf die durch  $B_1$  bez.  $B_2$  gelegten Geraden  $c_1$  bez.  $c_2$ , bilden eine Kongruenz. Als *Bild* der  $\varrho^3$ , welche  $c_1$  in  $C'$ ,  $c_2$  in  $C''$  trifft, betrachte ich die Spur  $R$  der Gerade  $C'C''$  in der vorgegebenen *Bildebene*  $E$ .

Die *Spuren*  $S_1$  und  $S_2$  von  $c_1$  und  $c_2$  sind *Ausnahmepunkte*; der Punkt  $S_1$  ist nämlich das Bild jeder Kurve  $\varrho^3$  durch  $S_1$  und  $B_k$ , die  $c_2$  schneidet. Diese Kurven liegen alle auf der Kegelfläche  $\varphi_2^2$ , mit Spitze  $B_2$ , welche durch die 5 Geraden  $B_2B_k, B_2S_1$  und  $B_2S_2$  bestimmt wird; denn jede der sprachlichen  $\varrho^3$  hat 7 Punkte mit  $\varphi^2$  gemein, gehört ihr daher an.

Den Schnittpunkten von  $\varphi_2^2$  mit einer vorgegebenen Gerade  $l$  entsprechend, gibt es somit zwei Kongruenzkurven, die  $c_1$  in  $S_1$  treffen.

Die *Bildkurve* des Systems der  $l$  treffenden  $\varrho^3$  hat demnach einen *Doppelpunkt* in  $S_1$ , und analog auch in  $S_2$ . Weil die Gerade  $S_1S_2$  das Bild ist der durch  $S_1$  und  $S_2$  gelegten  $\varrho^3$ , welche i.A.  $l$  nicht trifft, ist die betreffende *Bildkurve* eine  $\lambda^1(S_1^2S_2^2)$ .

§ 2. Es sei  $r_3$  die Transversale durch  $B_3$  über  $c_1$  und  $c_2$ ,  $C_3$  ihre Spur in der Ebene  $\beta_{124}$  ( $B_1 B_2 B_4$ ). Jeder Kegelschnitt  $\varrho^2_3$  durch  $B_1, B_2, C_3$  und  $B_4$  wird durch  $r_3$  zu einer Kurve  $\varrho^3$  ergänzt. Das ganze System  $(r_3, \varrho^2_3)$  wird abgebildet in die Spur  $S_3$  der Gerade  $r_3$ .

Analog ist die Spur  $S_4$  der Transversale  $r_4$  aus  $B_4$  über  $c_1, c_2$  das Bild des Systems  $(r_4, \varrho^2_4)$ , wo die  $\varrho^2_4$  die Punkte  $B_1, B_2, B_3$  und  $C_4$  enthalten.

Weil  $l$  je eine  $\varrho^2_3$  b.z.  $\varrho^2_4$  trifft, enthält  $\lambda^4$  auch die Punkte  $S_3$  und  $S_4$ .

Andere Systeme in denen die Gerade  $C' C''$  eine feste Lage hätte, gibt es nicht. Die Bildkurve des Systems  $\Lambda$  der sich auf  $l$  stützenden  $\varrho^3$  entspricht somit dem Symbol  $\lambda^4(S_1^2 S_2^2 S_3 S_4)$ .

Die Kurven  $\lambda^4$  und  $\mu^4$ , die den Geraden  $l$  und  $m$  entsprechen, begegnen sich in 6 Punkten  $R$ ; es gibt daher sechs Kurven der Kongruenz, die zwei beliebig gewählte Geraden treffen, und die  $\varrho^3$ , welche  $l$  schneiden, bilden eine Fläche sechsten Grades,  $\Lambda^6$ .

§ 3. Es gibt noch andere Systeme von ausgearteten  $\varrho^3$ . In der Ebene  $\beta_{134}$  betrachte ich das Büschel  $(\varrho^2_2)$  durch  $B_1, B_3, B_4$  und die Spur  $C_2$  von  $c_2$ . Jeder Kurve dieses Büschels ist eine Transversale  $r_2$  durch  $B_2$  über  $c_1$  zugeordnet, welche sie zu einer  $\varrho^3$  ergänzt; jeder Strahl  $r_2$  des Büschels um  $B_2$ , der  $c_1$  trifft, bestimmt eine  $\varrho^2_2$ . Das Bild des Systems  $(r_2, \varrho^2_2)$  ist ersichtlich die Spur der Ebene  $C_2 c_1$ ; ich bezeichne sie mit  $g_1(S_1)$ .

Analog ist die Spur  $g_2$  der Ebene  $C_1 c_2$  das Bild des Systems  $(r_1, \varrho^2_1)$ , wo  $r_1$  durch  $B_1$  über  $c_2$  gelegt wird und eine  $\varrho^2_1$  trifft, welche die Punkte  $B_2, B_3, B_4$  und  $C_1(c_1 \beta_{234})$  enthält. Symbol  $g_2(S_2)$ .

§ 4. In der Ebene  $\gamma_{41}$  durch  $B_4$  und  $c_1$  betrachte ich die Kegelschnitte durch  $B_1, B_4, C_2$  (Spur von  $c_2$ ) und  $B_{23}$  (Spur von  $b_{23} \equiv B_2 B_3$ ); sie bilden je mit  $b_{23}$  eine  $\varrho^3$ . Dieses System wird abgebildet auf die Spur  $g_{41}$  der Ebene  $\gamma_{41}(C_2 c_1)$ , welche nach  $S_1$  zielt.

In diesem System  $(b_{23}, \gamma^2_{41})$  betrachte ich die Figur, welche aus den 3 Geraden  $b_{23}, B_{23} B_1$  und  $B_4 C_2$  besteht, von denen die ersten zwei in der Ebene  $\beta_{123}$  liegen und eine Ausartung des Büschels  $(\varrho^2_4)$  bilden, indes  $B_4 C_2$  die in § 2 mit  $r_4$  bezeichnete Gerade ist. Die sprachliche Figur gehört somit auch dem System  $(r_4, \varrho^2_4)$  an und wird demnach in  $S_4$  abgebildet.

Das Bild von  $(b_{23}, \gamma^2_{41})$  entspricht somit dem Symbol  $g_{41}(S_1 S_4)$ .

Analog beziehen die Symbole  $g_{31}(S_1 S_3)$ ,  $g_{32}(S_2 S_3)$  und  $g_{42}(S_2 S_4)$  sich auf die Systeme  $(b_{24}, \gamma^2_{31})$ ,  $(b_{14}, \gamma^2_{32})$  bez.  $(b_{13}, \gamma^2_{42})$ .

§ 5. Schliesslich betrachte ich die Kegelschnitte  $\delta^2$  durch  $B_3$  und  $B_4$ , welche sich auf  $c_1, c_2$  und  $b_{12}$  stützen; sie bilden die quadratische Fläche  $\Delta^2$ , welche durch  $B_3, B_4, c_1, c_2$  und  $b_{12}$  gelegt werden kann. Jede  $\delta^2$  bildet mit  $b_{12}$  eine Kongruenzkurve  $\varrho^3$ .

Der Ort der Geraden, welche die jedesmaligen Schnittpunkte  $C_1, C_2$



von  $c_1, c_2$  mit  $\delta^2$  verbinden, ist die quadratische Regelschar durch  $c_1, c_2$  und  $b_{34}$ . Das Bild des Systems  $\Delta$  ist somit eine Kurve  $\gamma^2$  durch  $S_1, S_2$  und die Spur von  $b_{34}$ .

Eine Ausartung im System der  $\delta^2$  besteht aus der Gerade  $r_3$  (aus  $B_3$  über  $c_1, c_2$ ) und der Transversale aus  $B_4$  über  $r_3$  und  $b_{12}$ . Die letzteren zwei Geraden liegen in der Ebene  $\beta_{124}$  und bilden eine Ausartung des Büschels ( $\varrho_3^2$ ); mit  $r_3$  bilden sie ersichtlich eine Figur des Systems ( $r_3, \varrho_3^2$ ), welche demnach in  $S_3$  ihr Bild hat.

Die Abbildung des Systems  $\Delta$  entspricht also dem Symbol  $\gamma^2 (S_1 S_2 S_3 S_4)$ .

Mit einer Kurve  $\lambda^1 (S_1^2 S_2^2 S_3 S_4)$  hat sie 2 Punkte  $R$  gemein; diese vertreten die beiden Kurven  $\delta^2$ , welche  $l$  treffen.

Die Gerade  $g_1(S_1)$  trifft  $\gamma^2$  noch in einem Punkte  $R$ ; dieser ist das Bild der Figur, welche aus der in  $\beta_{134}$  liegenden  $\delta^2$  und der Gerade  $b_{12}$  besteht. Analoges gilt für den Punkt  $R$ , in dem  $g_2(S_2)$  die  $\gamma^2$  trifft.

§ 6. Ich betrachte nun den Schnittpunkt  $R$  der Bildgeraden  $g_{32}$  und  $g_{41}$ ; er ist das Bild einer Figur  $\varrho^3$ , welche aus drei Geraden besteht, nämlich aus  $b_{23}, b_{14}$  und der Schnittlinie der Ebenen  $\gamma_{32}$  und  $\gamma_{41}$ , welche ersichtlich sich auf  $b_{23}, b_{14}, c_1$  und  $c_2$  stützt.

Ein analoges Gebilde entspricht dem Punkte  $g_{31} g_{42}$ ; es besteht aus  $b_{13}, b_{24}$  und  $\gamma_{31} \gamma_{42}$ .

Der Schnittpunkt der Bildgeraden  $g_1(S_1)$  und  $g_2(S_2)$  vertritt das Gebilde, welches aus  $b_{34}$  und den Strahlen  $r_1, r_2$  besteht, die  $b_{34}$  treffen (§ 3).

Dem Schnittpunkt von  $g_2(S_2)$  und  $S_1 S_4$  entspricht eine Figur, welche den Systemen ( $\varrho_1^2, r_1$ ) und ( $b_{23}, \gamma_{41}^2$ ) gemeinsam ist. Sie besteht aus  $b_{23}$ , einem Strahle  $r_1$  und einer Gerade durch  $B_4$ , die  $b_{23}, c_1$  und  $r_1$  schneidet; sie kann mit  $\beta_{234} \gamma_{41}$  bezeichnet werden.

Analoge Gebilde entsprechen den Schnittpunkten von  $g_2(S_2)$  mit  $S_1 S_3$ , von  $g_1(S_1)$  mit  $S_2 S_3$  und von  $g_1(S_1)$  mit  $S_2 S_4$ .

Zu den in § 6 erwähnten 7 ausgearteten Figuren kommen noch die 6 in  $S_3$  und  $S_4$  abgebildeten aus je drei Geraden bestehenden  $\varrho^3$  (§ 4, § 5).

Im ganzen gibt es demnach *dreizehn aus je drei Geraden zusammengesetzte Kongruenzfiguren*.

§ 7. Es soll noch das System  $\Phi$  der  $\varrho^3$ , welche eine vorgegebene Ebene  $\varphi$  berühren, betrachtet werden. Auf der Schnittkurve der Kegel-  
fläche  $\varphi_2^2$  (§ 1) mit  $\varphi$  erzeugen die  $\varrho^3$  durch  $S_1$  eine kubische Involution, deren 4 Doppelpunkten von 4 durch  $\varphi$  berührten  $\varrho^3$  herrühren. Demnach ist  $S_1$  ein *vierfacher Punkt* der Bildkurve des Systems  $\Phi$ .

In der Ebene  $\beta_{124}$  gibt es 2 Kegelschnitte, die  $\varphi$  berühren, wonach  $S_3$  *Doppelpunkt* der Bildkurve ist. Diese entspricht somit dem Symbol  $\varphi^8 (S_1^4 S_2^4 S_3^2 S_4^2)$ .

Sie begegnet einer Kurve  $\lambda^4 (S_1^2 S_2^2 S_3 S_4)$  in 12 Punkten  $R$ ; die Kongruenzkurven, welche eine Ebene berühren, bilden also eine *Fläche zwölften Grades*.

Mathematics. — *Abbildung einer besonderen Kongruenz von Kegelschnitten auf das Punktfeld.* Von JAN DE VRIES.

(Communicated at the meeting of March 24, 1934).

§ 1. Die Kegelschnitte  $k^2$ , welche den vorgegebenen Kegelschnitt  $\alpha^2$  zweimal treffen, den festen Punkt  $B$  enthalten und die Geraden  $c_1$ ,  $c_2$  schneiden, bilden eine Kongruenz.

Eine Gerade  $g$  ist i.A. Bisekante einer Kurve  $k^2$ .

Die Kurven  $k^2$ , welche  $B$  und  $P$  enthalten,  $c_1$  treffen und  $\alpha^2$  je zweimal schneiden, bilden ein kubisches Dimonoid  $\Delta^3$ ; es gibt nämlich eine Bisekante von  $\alpha^2$ , welche  $c_1$  und  $BP$  trifft, daher mit  $BP$  eine Figur  $k^2$  bildet. Den Schnittpunkten von  $\Delta^3$  und  $c_2$  entsprechend trägt  $P$  drei Kongruenzkurven.

§ 2. Durch einen Punkt  $P_1$  von  $c_1$  und einen Punkt  $P_2$  von  $c_2$  ist ein  $k^2$  bestimmt; als ihr *Bild* betrachte ich den Schnittpunkt  $K$  von  $P_1P_2$  mit der Bildebene  $E$ .

Die Spuren  $S_1$  und  $S_2$  von  $c_1$  und  $c_2$  sind *Ausnahmepunkte*; die Gerade  $S_1S_2$  ist das Bild der durch  $S_1$  und  $S_2$  bestimmten Figur  $k^2$ .

Es sei  $d_{12}$  die Gerade der  $\alpha^2$  tragenden Ebene  $\alpha$ , welche  $c_1$  und  $c_2$  trifft; sie bildet mit jeder sie treffenden, durch  $B$  gelegten Gerade eine  $k^2$ . Alle diese ausgearteten Figuren werden abgebildet in die *Spur*  $S_3$  von  $d_{12}$ .

Die Transversale  $t_{12}$  aus  $B$  über  $c_1$  und  $c_2$  bildet eine Figur  $k^2$  mit jeder sie treffenden Gerade  $d$  der Ebene  $\alpha$ . Alle diese Figuren werden abgebildet in die *Spur*  $S_4$  von  $t_{12}$ .

§ 3. Jede Gerade  $g_1$  von  $\alpha$ , welche  $c_1$  (in  $C_1$ ) trifft, wird zu einer  $k^2$  ergänzt durch eine Transversale  $h_1$  aus  $B$  über  $c_2$ . Jeder Gerade  $h_1$  ist eine bestimmte Gerade  $g_1$  zugeordnet. Die Gerade  $d_{12}$ , welche die Spuren von  $c_1$  und  $c_2$  verbindet, gehört dem Büschel  $(g_1)$  an; das durch sie bestimmte Geradenpaar wird in  $S_3$  abgebildet (§ 2). Das *Bild* des Systems  $(g_1, h_1)$  ist die *Spur* der Ebene  $(C_1 c_2)$ , demnach die Gerade  $S_2S_3$ .

Analog ist  $S_1S_3$  das *Bild* eines Systems  $(g_2, h_2)$ .

§ 4. In der Ebene  $\gamma_1$  durch  $B$  und  $c_1$  liegt ein Büschel  $(k_1^2)$  mit Basispunkten  $B$  und den Spuren  $C_2, A_1, A_2$  von  $c_2$  und  $\alpha^2$ . Das dazu gehörige Geradenpaar  $BC_2, A_1A_2$  gehört ebenfalls dem System  $(t_{12}, d)$  an, wird somit in  $S_4$  abgebildet (§ 2). Das *Bild* des Büschels  $(k_1^2)$  ist demnach die Gerade  $S_1S_4$ .



Analog vertritt die Gerade  $S_2S_4$  das in der Ebene  $\gamma_2(Bc_2)$  belegene Büschel  $(k_2^2)$ .

§ 5. Durch  $B$  gehen zwei Transversalen  $f_1$  und  $f_1^*$  über  $c_1$  und  $\alpha^2$ . Jede Ebene durch  $f_1$  enthält eine Transversale  $t_1$  über  $\alpha^2$  und  $c_2$ , welche  $f_1$  zu einem Geradenpaar ergänzt. Der Ort der Geraden  $t_1$  ist eine kubische Regelfläche  $(t_1)^3$  mit Doppelgerade  $f_1$ ; jeder Punkt von  $f_1$  trägt ersichtlich zwei Geraden  $t_1$ . Das Bild des Systems  $(f_1, t_1)$  ist eine durch  $S_2$  gelegte Gerade  $e_2$ .

Analog gibt es eine Gerade  $e_2^*$  durch  $S_2$  und die Geraden  $e_1, e_1^*$  durch  $S_1$ . In jedem dieser vier Systeme  $(f, t)$  gibt es eine Figur, welche aus zwei sich in  $B$  treffenden Geraden besteht.

Im System  $(f_1, t_1)$  gibt es eine Figur  $k^2$ , welche ebenfalls dem in  $\gamma_1$  befindlichen System angehört; denn die Schnittpunkte  $C_2$  und  $A_2$  von  $\gamma_1$  mit  $c_2$  und  $\alpha^2$  werden durch eine Gerade  $t_1$  verbunden.

§ 6. Das System  $A$  der  $k^2$ , welche eine Gerade  $l$  schneiden, wird abgebildet auf eine Kurve  $\lambda^6(S_1^3S_2^3S_3S_4)$ ;  $c_2$  trifft ja das durch  $S_1$  bestimmte Dimonoid  $\Delta_1^3$  in 3 Punkten.

Die Kurven  $\lambda^6$  und  $\mu^6$ , die den Geraden  $l$  und  $m$  entsprechen, haben 16 Punkte  $K$  gemein. Auf zwei Gerade stützen sich daher i.A. *sechszehn*  $k^2$ , und das System  $A$  liegt auf einer *Fläche sechszehnten Grades*,  $\Lambda^{16}$ , mit *dreifachen* Geraden  $c_1$  und  $c_2$ .

Der Ort der  $k^2$ , welche  $\alpha^2$  in einem vorgegebenen Punkte  $A_1$  treffen, ist ein Dimonoid fünften Grades; die Geraden  $t$ , welche  $a_1(A_1B)$ ,  $c_1$  und  $c_2$  schneiden, daher eine quadratische Regelschar bilden, treffen  $\alpha^2$  nämlich in 3 Punkten  $A_2$ , wonach  $a_1$  eine dreifache torsale Gerade ist, Folglich ist  $\alpha^2$  eine *fünffache* Kurve von  $\Lambda^{16}$ . Der Schnitt dieser Fläche mit der Ebene  $\alpha$  besteht ausserdem aus 6 Geraden, nämlich aus  $d_{12}$ , einer Gerade  $d$ , zwei Geraden  $g_1$  und zwei Geraden  $g_2$ .

§ 7. Jede Ebene  $\varepsilon$ , welche die Kegelfläche berührt, die  $\alpha^2$  aus  $B$  projiziert, enthält eine Kurve  $k^2$ , welche  $\alpha^2$  berührt. Weil jeder Punkt  $P_1$  von  $c_1$  zwei Ebenen  $\varepsilon$  trägt, erzeugen die Ebenen  $\varepsilon$  auf  $c_1$  und  $c_2$  zwei Punktreihen in (2, 2) Verwandtschaft. Hieraus erhellt, dass das System der  $k^2$ , die  $\alpha^2$  berühren, abgebildet wird auf eine Kurve  $\beta^4(S_1^2S_2^2)$ . Es gibt im System  $(t_{12}, d)$  zwei Figuren, deren Gerade  $d$  die Kurve  $\alpha^2$  berührt; demnach ist  $S_4$  auch Doppelpunkt von  $\beta^4$ .

Mit einer Bildkurve  $\lambda^6$  hat  $\beta^4$  ersichtlich 10 Punkte  $K$  gemein. Die Kongruenzkurven  $k^2$ , welche  $\alpha^2$  berühren, bilden somit eine *Fläche zehnten Grades*.

§ 8. Ich betrachte nun das System  $\Phi$  der  $k^2$ , welche eine vorgegebene Ebene  $\varphi$  berühren.

Das Dimonoid  $\Delta_1^3$  (welches durch  $S_1$  bestimmt wird) trifft  $\varphi$  in einer kubischen Kurve, von deren Tangenten sich 4 auf der Gerade  $BS_1$  treffen. Daher enthält  $\Delta_1^3$  vier  $k^2$ , die  $\varphi$  berühren, wonach  $S_1$  vierfacher Punkt der Bildkurve des Systems  $\Phi$  ist.

Der Schnittpunkt von  $\varphi$  und  $d_{12}$  ist der Doppelpunkt einer Ausartung von  $k^2$ ; diese muss bekanntlich zweimal in Rechnung gebracht werden unter den von  $\varphi$  berührten Kurven.

Die Bildkurve des Systems  $\Phi$  ist demnach eine  $\varphi^8 (S_1^4 S_2^4 S_4^2)$ . Weil sie mit einer Kurve  $\lambda^6$  22 Punkte  $K$  gemein hat, liegen die von  $\varphi$  berührten  $k^2$  auf einer Fläche 22ten Grades.

Die Ebene  $\varphi$  schneidet das einem Punkte  $A_1$  von  $\alpha^2$  zugeordnete Dimonoid  $\Delta^5$  in einer Kurve  $\delta^5$ , welche auf  $A_1 B$  einen dreifachen Punkt hat; weil sich in diesem Punkte 8 Tangenten von  $\delta^5$  treffen, enthält  $\Delta^5$  acht  $k^2$ , welche  $\varphi$  berühren. Demnach ist  $\alpha^2$  achtfache Kurve von  $\Phi^{22}$ . Der Schnitt dieser Fläche mit  $\alpha$  besteht ausserdem aus drei doppelt zu zählen Geraden, nämlich  $d_{12}$ , einer Gerade  $g_1$  und einer Gerade  $g_2$ .

**Astronomy.**—*Mittlere Lichtkurven von langperiodischen Veränderlichen.*  
XVIII. *R Lyncis*. Von A. A. NIJLAND.

(Communicated at the meeting of March 24, 1934.)

Instrumente  $S$  und  $R$ . Die Beobachtungen wurden alle auf  $R$  reduziert; die Reduktion  $R-S$  beträgt  $-0^m.17$ . Spektrum Se (H.A. 79, 168). Gesamtzahl der Beobachtungen 678 (von 2416835 bis 2427457). Es wurden wieder, wie in allen früheren Mitteilungen, die in zwei Instrumenten angestellten Schätzungen nur einmal gezählt. Zwei stark abweichende Schätzungen (2417771 und 2421807) wurden verworfen. Da weiter in 46 in der Figur 1 mit  $v$  bezeichneten Fällen der Stern als unsichtbar notiert wurde, so bleiben 630 Beobachtungen für die Diskussion übrig.

Karte: HAGEN, *Atlas Stell. var. Series III*; s. auch *Spec. Vat. XII*.

Die Tabelle I gibt eine Übersicht der benutzten Vergleichsterne. Zur Erzielung eines besseren Anschlusses der Stufenskala an das System der HP wurden die vier mit einem  $*$  bezeichneten Sterne aus HA 37 ein paar Mal mit beobachtet. Das Spektrum der 8. Spalte entnahm ich den HA 92. Stern  $B$  wird hier als  $6^m.76$  gegeben, Stern  $c^*$  als  $7^m.47$ . Stern  $B$  kommt in der PD vor ( $7^m.14$ ,  $W+$ ); die Grösse und die Farbe des Sterns  $A$  ( $8^m.19$ ,  $GW$ ) teilte mir s.Z. auf meine Bitte weiland G. MÜLLER brieflich mit. Die auf die HP reduzierten Helligkeiten dieser beiden Sterne sind  $6^m.82$  bzw.  $7^m.90$ .

Stern  $j$  wurde 10-mal an die Grenze von  $S$  angeschlossen, die Sterne  $r$ ,  $s$  und  $t$  5-, bzw. 12- und 43-mal, bei der Beobachtung des Veränderlichen



TABELLE I. Vergleichsterne.

| *  | BD        | HAGEN | St.               | HA 29             | HA 37             | HA 74             | Sp.                | H                 |
|----|-----------|-------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| B  | + 55.1155 | 1     | 73.5              | <sup>m</sup> 6.70 | <sup>m</sup> 6.70 | <sup>m</sup> 6.80 | B 8                | <sup>m</sup> 6.80 |
| c* | + 54.1101 | —     | 66.7              | —                 | 7.40              | 7.28              | G 0                | [7.46]            |
| A  | + 55.1138 | —     | 65.2              | —                 | —                 | —                 | —                  | 7.61              |
| a  | + 55.1164 | 2     | 61.4              | 7.99              | 7.94              | 7.94              | A 2                | 7.97              |
| b  | + 55.1150 | 4     | 56.2              | 8.55              | 8.69              | 8.50              | A 0                | 8.48              |
| f* | + 55.1156 | 7     | 51.9              | 8.93              | 8.96              | 8.81              | A 0                | [8.90]            |
| c  | + 55.1161 | 6     | 51.5              | 9.19              | —                 | —                 | —                  | 8.94              |
| d  | + 55.1151 | 12    | 47.1              | —                 | 9.47              | 9.37              | —                  | 9.36              |
| h* | + 55.1157 | 15    | 43.3              | 9.92              | 9.70              | 9.75              | —                  | [9.73]            |
| e  | + 55.1158 | 16    | 42.8              | —                 | —                 | —                 | —                  | 9.78              |
| f  | —         | 20    | 39.4              | 10.19             | —                 | 10.22             | —                  | 10.11             |
| g  | —         | 23    | 35.6              | —                 | —                 | —                 | —                  | 10.48             |
| h  | —         | 28    | 33.1              | 10.57             | —                 | 10.78             | Grenze             | 10.73             |
| j  | —         | 31    | 27.1              | —                 | 11.16             | 11.14             | <sup>m</sup> 11.42 | 11.32             |
| k  | —         | 38    | 21.5              | —                 | —                 | —                 | —                  | 11.87             |
| l  | —         | 44    | 21.2              | 11.81             | 12.12             | 11.96             | —                  | 11.90             |
| m  | —         | 47    | 16.7 <sup>5</sup> | —                 | —                 | —                 | —                  | 12.33             |
| n  | —         | 50    | 14.8 <sup>5</sup> | 12.57             | —                 | —                 | —                  | 12.52             |
| q* | —         | 48    | 12.7              | —                 | 12.42             | 12.69             | —                  | [12.72]           |
| p  | —         | 60    | 12.0              | —                 | —                 | —                 | —                  | 12.79             |
| q  | —         | 52    | 11.7              | —                 | —                 | —                 | —                  | 12.82             |
| r  | —         | 63    | 8.1               | —                 | 12.86             | 13.37             | 13.51              | 13.17             |
| s  | —         | 67    | 2.0               | —                 | —                 | —                 | 13.81              | 13.76             |
| t  | —         | 68    | 0.0               | —                 | —                 | —                 | 13.91              | 13.96             |

im Minimum, an die Grenze von R. Die Stufenskala bezieht sich auf die Helligkeit  $10^{\text{m}.5}$ ; der Stufenwert ist  $0^{\text{m}.097}$ . Der Anschluss an die photometrischen Helligkeiten ist recht befriedigend.

Es liegen 76 Schätzungen der Farbe vor, welche für drei Viertel aus den Jahren 1905 bis 1911 stammen. Aus der Tabelle IIa könnte man folgern, dass die Farbe sich seit d.J. 1905 allmählich etwas vertieft hätte. Eine Korrelation mit der Helligkeit ist nicht sicher nachweisbar (Tabelle IIb). Das allgemeine Mittel ist  $3^{\text{c}.13}$ .

TABELLEN IIa und IIb. Farbenschätzungen.

| Zeitraum                     | <i>n</i>  | Farbe                | Grösse               | <i>n</i>  | Farbe                |
|------------------------------|-----------|----------------------|----------------------|-----------|----------------------|
| <sup>241</sup><br>7106—7589  | 20        | <sup>c</sup><br>2.53 | <sup>m</sup><br>7.33 | 12        | <sup>c</sup><br>3.54 |
| 7667—8704                    | 18        | 3.22                 | 7.67                 | 13        | 2.92                 |
| <sup>242</sup><br>9024— 0956 | 22        | 3.32                 | 7.80                 | 12        | 2.88                 |
| 1305— 6991                   | 16        | 3.50                 | 8.17                 | 13        | 3.15                 |
|                              | <u>76</u> |                      | 8.48                 | <u>13</u> | 2.77                 |
|                              |           |                      | 9.76                 | <u>13</u> | 3.50                 |
|                              |           |                      |                      | <u>76</u> |                      |

Die Figur 1 enthält die Beobachtungen, alle auf *R* reduziert. Die Reihe der Abweichungen (Beobachtung minus Kurve) zeigt 216 Plus-, 228 Minuszeichen, 186 Nullwerte, 234 Zeichenfolgen, 210 Zeichenwechsel. Das Mittel der absoluten Werte der Abweichungen ist 0<sup>m</sup>.102.

Ein Einfluss des Mondscheines auf die Helligkeitsschätzung ist nicht nachweisbar. Es verteilen sich auch 174 bei Mondschein angestellte Beobachtungen die Abweichungen wie folgt: 61 Plus-, 61 Minuszeichen, 52 Nullwerte.

Die Tabelle III enthält die aus der Kurve abgelesenen Epochen der Minima *m* und der Maxima *M*. Die Spalte *R* wurde mit den einfachen Elementen:

$$2422296^{\text{d}.5} + 378^{\text{d}.5} E \text{ (für die Minima)}$$

und  $2422460 + 378 .5 E \text{ (für die Maxima)}$

gerechnet.

Diese einfachen Elemente stellen die beobachteten Epochen sehr gut dar: offenbar kommt man für das hier diskutierte Beobachtungsmaterial ohne periodische Glieder aus. Auch hier wieder der schon so oft von mir konstatierte scharfe Widerspruch mit den früheren Ergebnissen. Zur befriedigenden Darstellung der älteren Epochen werden in den *G* und *L* (I, S. 207) periodische Glieder mit Amplituden von 20<sup>d</sup> (für die Minima) und 12<sup>d</sup> (für die Maxima) herangezogen, welche für den Zeitraum den meine Beobachtungen decken gar nicht am Platze sind.

PRAGER's Katalog für 1934 gibt den Periodenwert 378<sup>d</sup>.4, und das aus sämtlichen von mir seit d.J. 1905 in den Astr. Nachr. mitgeteilten Epochen der Minima und Maxima abgeleitete allgemeine Mittel ist 378<sup>d</sup>. Die extremen Werte des Lichtwechsels sind:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimum: } v = 14^{\text{m}.00 \pm 0^{\text{m}.042} \\ \text{Maximum: } v = 7 .61 \pm 0 .054 \end{array} \right\} \text{ (m.F.).}$$

Die Amplitude beträgt somit 6<sup>m</sup>.39. Sowohl beim Minimum wie beim



A. A. NIJLAND: MITTLERE LICHTKURVEN VON LANGPERIODISCHEN VERÄNDERLICHEN. XVIII. R LYNCIS.

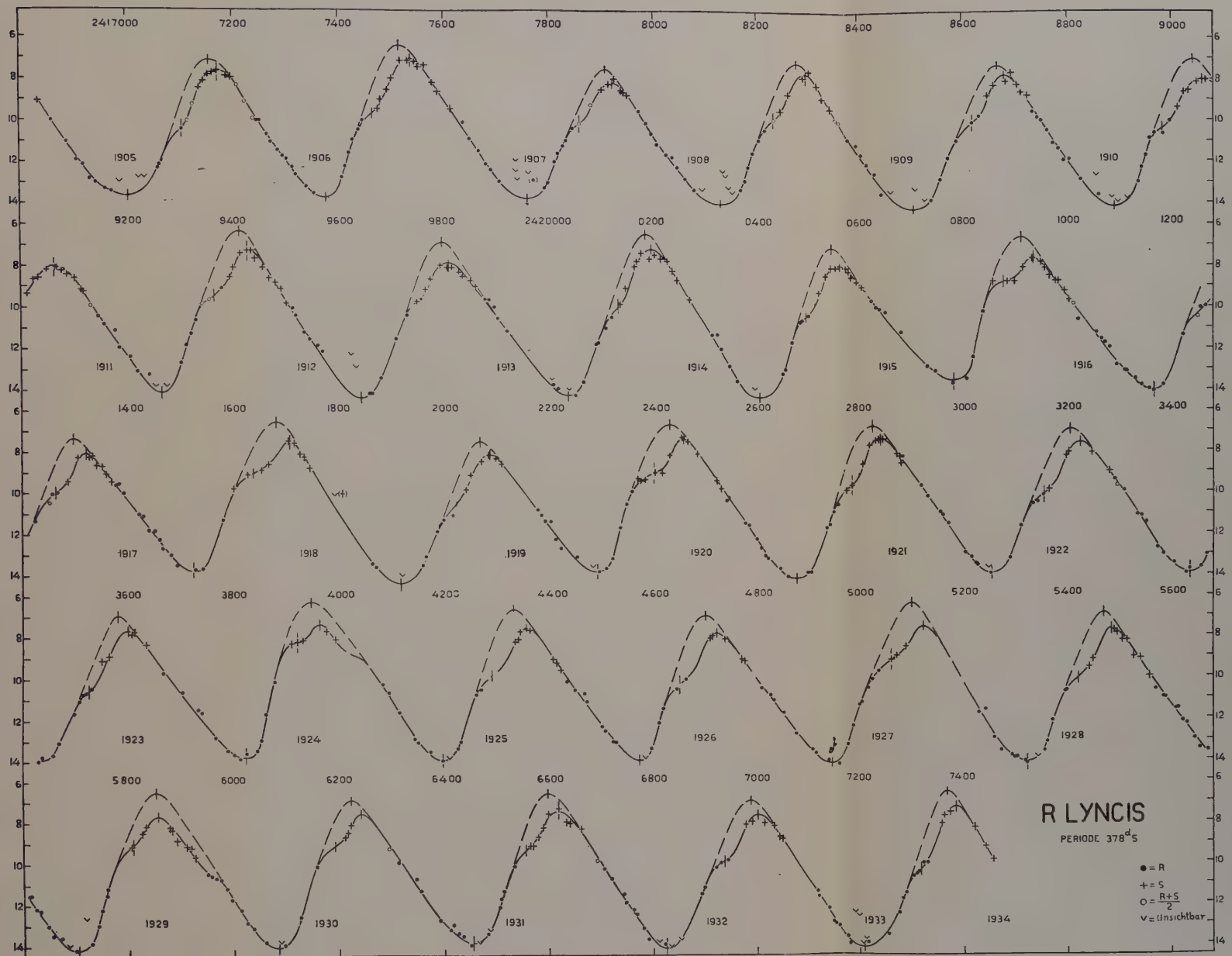


Fig. 1





TABELLE III.

| <i>E</i> | Minima <i>m</i>     |                   |                   |                     | Maxima <i>M</i>     |                  |                   |                     |
|----------|---------------------|-------------------|-------------------|---------------------|---------------------|------------------|-------------------|---------------------|
|          | <i>B</i>            | <i>v</i>          | <i>R</i>          | <i>B</i> — <i>R</i> | <i>B</i>            | <i>v</i>         | <i>R</i>          | <i>B</i> — <i>R</i> |
| — 14     | <sup>241</sup> 7004 | <sup>m</sup> 13.6 | 6997 <sup>s</sup> | + 6 <sup>s</sup>    | <sup>241</sup> 7173 | <sup>m</sup> 7.6 | 7161              | + 12                |
| — 13     | 7379                | 13.7              | 7376              | + 3                 | 7538                | 7.0              | 7539 <sup>s</sup> | — 1 <sup>s</sup>    |
| — 12     | 7760                | 13.8              | 7754 <sup>s</sup> | + 5 <sup>s</sup>    | 7923                | 8.2              | 7918              | + 5                 |
| — 11     | 8130                | 14.0              | 8133              | — 3                 | 8297                | 7.7              | 8296 <sup>s</sup> | + 0 <sup>s</sup>    |
| — 10     | 8507                | 14.3              | 8511 <sup>s</sup> | — 4 <sup>s</sup>    | 8680                | 7.8              | 8675              | + 5                 |
| — 9      | 8890                | 14.2              | 8890              | 0                   | 9060                | 8.0              | 9053 <sup>s</sup> | + 6 <sup>s</sup>    |
| — 8      | 9264                | 14.1              | 9268 <sup>s</sup> | — 4 <sup>s</sup>    | 9428                | 7.2 <sup>s</sup> | 9432              | — 4                 |
| — 7      | 9643                | 14.3 <sup>s</sup> | 9647              | — 4                 | 9810                | 7.8              | 9810 <sup>s</sup> | — 0 <sup>s</sup>    |
| — 6      | <sup>242</sup> 0035 | 14.2              | 0025 <sup>s</sup> | + 9 <sup>s</sup>    | <sup>242</sup> 0196 | 7.2              | 0189              | + 7                 |
| — 5      | 0404                | 14.3              | 0404              | 0                   | 0562                | 7.9 <sup>s</sup> | 0567 <sup>s</sup> | — 5 <sup>s</sup>    |
| — 4      | 0782                | 13.5              | 0782 <sup>s</sup> | — 0 <sup>s</sup>    | 0934                | 7.6 <sup>s</sup> | 0946              | — 12                |
| — 3      | 1168                | 14.0              | 1161              | + 7                 | 1321                | 8.0 <sup>s</sup> | 1324 <sup>s</sup> | — 3 <sup>s</sup>    |
| — 2      | 1524                | 13.7              | 1539 <sup>s</sup> | — 15 <sup>s</sup>   | 1707                | 7.4              | 1703              | + 4                 |
| — 1      | 1918                | 14.3              | 1918              | 0                   | 2085                | 8.1              | 2081 <sup>s</sup> | + 3 <sup>s</sup>    |
| 0        | 2291                | 13.8              | 2296 <sup>s</sup> | — 5 <sup>s</sup>    | 2457                | 7.4              | 2460              | — 3                 |
| + 1      | 2677                | 14.2              | 2675              | + 2                 | 2841                | 7.4              | 2838 <sup>s</sup> | + 2 <sup>s</sup>    |
| + 2      | 3054                | 13.9              | 3053 <sup>s</sup> | + 0 <sup>s</sup>    | 3225                | 7.6              | 3217              | + 8                 |
| + 3      | 3436                | 13.9              | 3432              | + 4                 | 3599                | 7.7              | 3595 <sup>s</sup> | + 3 <sup>s</sup>    |
| + 4      | 3823                | 13.8              | 3810 <sup>s</sup> | + 12 <sup>s</sup>   | 3963                | 7.3              | 3974              | — 11                |
| + 5      | 4197                | 13.9              | 4189              | + 8                 | 4355                | 7.6              | 4352 <sup>s</sup> | + 2 <sup>s</sup>    |
| + 6      | 4572                | 14.0              | 4567 <sup>s</sup> | + 4 <sup>s</sup>    | 4721                | 7.8              | 4731              | — 10                |
| + 7      | 4947                | 14.1              | 4946              | + 1                 | 5122                | 7.5 <sup>s</sup> | 5109 <sup>s</sup> | + 12 <sup>s</sup>   |
| + 8      | 5322                | 14.0              | 5324 <sup>s</sup> | — 2 <sup>s</sup>    | 5485                | 7.6              | 5488              | — 3                 |
| + 9      | 5703                | 14.1              | 5703              | 0                   | 5855                | 7.7              | 5866 <sup>s</sup> | — 11 <sup>s</sup>   |
| + 10     | 6085                | 14.1              | 6081 <sup>s</sup> | + 3 <sup>s</sup>    | 6240                | 7.5              | 6245              | — 5                 |
| + 11     | 6454                | 13.8 <sup>s</sup> | 6460              | — 6                 | 6616                | 7.4              | 6623 <sup>s</sup> | — 7 <sup>s</sup>    |
| + 12     | 6825                | 14.2              | 6838 <sup>s</sup> | — 13 <sup>s</sup>   | 7000                | 7.6              | 7002              | — 2                 |
| + 13     | 7208                | 14.2              | 7217              | — 9                 | 7385                | 7.3              | 7380 <sup>s</sup> | + 4 <sup>s</sup>    |
|          |                     | 14.00             |                   | ± 5                 |                     | 7.61             |                   | ± 6                 |

TABELLE IV.

| E    | A. Wendepunkte      |                   |                   |                   | B. Ungestörte Maxima |                               |                   |                  |
|------|---------------------|-------------------|-------------------|-------------------|----------------------|-------------------------------|-------------------|------------------|
|      | B                   | $\nu$             | R                 | B-R               | B                    | $\nu$                         | R                 | B-R              |
| - 14 | <sup>241</sup> 7106 | <sup>m</sup> 10.5 | 7098 <sup>5</sup> | + 7 <sup>5</sup>  | <sup>241</sup> 7156  | <sup>m</sup> 7.1 <sup>5</sup> | 7143              | + 13             |
| - 13 | 7465                | 9.7               | 7477              | - 12              | 7515                 | 6.4                           | 7521 <sup>5</sup> | - 6 <sup>5</sup> |
| - 12 | 7859                | 10.2              | 7855 <sup>5</sup> | + 3 <sup>5</sup>  | 7909                 | 7.5                           | 7900              | + 9              |
| - 11 | 8232                | 9.9               | 8234              | - 2               | 8278                 | 7.2                           | 8278 <sup>5</sup> | - 0 <sup>5</sup> |
| - 10 | 8618                | 10.1              | 8612 <sup>5</sup> | + 5 <sup>5</sup>  | 8667                 | 7.3 <sup>5</sup>              | 8657              | + 10             |
| - 9  | 8986                | 10.4              | 8991              | - 5               | 9041                 | 7.0 <sup>5</sup>              | 9035 <sup>5</sup> | + 5 <sup>5</sup> |
| - 8  | 9364                | 9.4               | 9369 <sup>5</sup> | - 5 <sup>5</sup>  | 9413                 | 6.3                           | 9414              | - 1              |
| - 7  | 9750                | 9.8               | 9748              | + 2               | 9797                 | 6.9                           | 9792 <sup>5</sup> | + 4 <sup>5</sup> |
| - 6  | <sup>242</sup> 0132 | 10.0              | 0126 <sup>5</sup> | + 5 <sup>5</sup>  | <sup>242</sup> 0184  | 6.5                           | 0171              | + 13             |
| - 5  | 0495                | 10.4              | 0505              | - 10              | 0546                 | 7.1                           | 0549 <sup>5</sup> | - 3 <sup>5</sup> |
| - 4  | 0876                | 8.9               | 0883 <sup>5</sup> | - 7 <sup>5</sup>  | 0911                 | 6.6                           | 0928              | - 17             |
| - 3  | 1266                | 10.0              | 1262              | + 4               | 1297                 | 7.3                           | 1306 <sup>5</sup> | - 9 <sup>5</sup> |
| - 2  | 1634                | 9.0               | 1640 <sup>5</sup> | - 6 <sup>5</sup>  | 1682                 | 6.5                           | 1685              | - 3              |
| - 1  | 2022                | 10.5              | 2019              | + 3               | 2067                 | 7.5                           | 2063 <sup>5</sup> | + 3 <sup>5</sup> |
| 0    | 2400                | 9.0               | 2397 <sup>5</sup> | + 2 <sup>5</sup>  | 2430                 | 6.6 <sup>5</sup>              | 2442              | - 12             |
| + 1  | 2788                | 9.6               | 2776              | + 12              | 2826                 | 6.8                           | 2820 <sup>5</sup> | + 5 <sup>5</sup> |
| + 2  | 3155                | 10.1              | 3154 <sup>5</sup> | + 0 <sup>5</sup>  | 3204                 | 6.9                           | 3199              | + 5              |
| + 3  | 3526                | 10.6              | 3533              | - 7               | 3580                 | 6.9                           | 3577 <sup>5</sup> | + 2 <sup>5</sup> |
| + 4  | 3921                | 8.2               | 3911 <sup>5</sup> | + 9 <sup>5</sup>  | 3947                 | 6.2                           | 3956              | - 9              |
| + 5  | 4290                | 9.9               | 4290              | 0                 | 4330                 | 6.6                           | 4334 <sup>5</sup> | - 4 <sup>5</sup> |
| + 6  | 4649                | 10.3 <sup>5</sup> | 4668 <sup>5</sup> | - 19 <sup>5</sup> | 4699                 | 7.0                           | 4713              | - 14             |
| + 7  | 5061                | 9.2               | 5047              | + 14              | 5100                 | 6.3 <sup>5</sup>              | 5091 <sup>5</sup> | + 8 <sup>5</sup> |
| + 8  | 5420                | 10.0              | 5425 <sup>5</sup> | - 5 <sup>5</sup>  | 5470                 | 6.9                           | 5470              | 0                |
| + 9  | 5807                | 9.0 <sup>5</sup>  | 5804              | + 3               | 5851                 | 6.5                           | 5848 <sup>5</sup> | + 2 <sup>5</sup> |
| + 10 | 6191                | 9.1               | 6182 <sup>5</sup> | + 8 <sup>5</sup>  | 6221                 | 6.9                           | 6227              | - 6              |
| + 11 | 6555                | 9.3               | 6561              | - 6               | 6596                 | 6.6                           | 6605 <sup>5</sup> | - 9 <sup>5</sup> |
| + 12 | 6934                | 9.9               | 6939 <sup>5</sup> | - 5 <sup>5</sup>  | 6993                 | 6.9                           | 6984              | + 9              |
| + 13 | 7318                | 10.3              | 7318              | 0                 | 7368                 | 6.6                           | 7362 <sup>5</sup> | + 5 <sup>5</sup> |
|      |                     | 9.76              |                   | $\pm$ 6           |                      | 6.83                          |                   | $\pm$ 7          |



Maximum scheinen die Abweichungen vom Mittelwert regellos aufzutreten.

Wie man sieht (Fig. 1), unterliegt jede Aufhellung von *R Lyncis* ohne Ausnahme einer meistens scharf ausgeprägten Verzögerung. Ausnahmsweise tritt eine solche auch im Abstieg auf (5855 und wahrscheinlich auch 3963). Zwecks Bildung einer mittleren Kurve verfuhr ich wieder so wie es früher bei *T Cassiopeiae* beschrieben wurde (Proc. 34, 220).

Die Tabelle IV A gibt die Epochen der im Aufstieg abgelesenen Wendepunkte, nebst der Vergleichung mit den Elementen *R*:

$$2422397^{\text{d}}.5 + 378^{\text{d}}.5 E.$$

Die Helligkeit im Wendepunkt ist:

$$v = 9^{\text{m}}.76 \pm 0^{\text{m}}.114 \text{ (m.F.)}.$$

Die drei Teilkurven schliessen sich, wie aus der Fig. 2 ersichtlich, auch hier wieder genau an einander an, und liefern zusammen die mittlere Kurve *B* (Tabelle V).

TABELLE V. Die mittlere Kurve.

| Phase              | $v$                | Phase             | $v$                | Phase             | $v$                | Phase              | $v$               | Phase              | $v$               |
|--------------------|--------------------|-------------------|--------------------|-------------------|--------------------|--------------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| — 110 <sup>d</sup> | 10.93 <sup>m</sup> | — 30 <sup>d</sup> | 13.60 <sup>m</sup> | + 50 <sup>d</sup> | 12.02 <sup>m</sup> | + 130 <sup>d</sup> | 8.78 <sup>m</sup> | + 200 <sup>d</sup> | 8.49 <sup>m</sup> |
| — 100              | 11.30              | — 20              | 13.80              | + 60              | 11.30              | + 140              | 8.24              | + 210              | 8.85              |
| — 90               | 11.67              | — 10              | 13.94              | + 70              | 10.72              | + 150              | 7.84              | + 220              | 9.22              |
| — 80               | 12.04              | 0                 | 14.00              | + 80              | 10.30              | + 160              | 7.64              | + 230              | 9.59              |
| — 70               | 12.39              | + 10              | 13.94              | + 90              | 10.02              | + 163 <sup>5</sup> | 7.61              | + 240              | 9.96              |
| — 60               | 12.73              | + 20              | 13.77              | + 100             | 9.80               | + 170              | 7.66              | + 250              | 10.33             |
| — 50               | 13.05              | + 30              | 13.40              | + 110             | 9.58               | + 180              | 7.86              | + 260              | 10.70             |
| — 40               | 13.34              | + 40              | 12.75              | + 120             | 9.24               | + 190              | 8.16              | + 270              | 11.07             |

Wird auch bei *R Lyncis* in der üblichen Weise die Kurve von der „Störung“ befreit, so entstehen die ungestörten Maxima, welche (Tabelle IV B) mit den Elementen *R*:

$$2422442^{\text{d}} + 378^{\text{d}}.5 E$$

verglichen wurden.

Die Teilkurve *A* der ungestörten Maxima (s. Fig. 2) schliesst sich derjenigen der Minima vollständig an. Für die Schiefe der ungestörten Kurve findet man

$$\frac{M-m}{P} = 0.384.$$

Die maximale „ungestörte“ Helligkeit ist:

$$v = 6^{\text{m}}.83 \pm 0^{\text{m}}.068 \text{ (m.F.)}.$$

Schliesslich wurde die Differenzkurve  $A-B$  gebildet, welche sich wieder nahezu symmetrisch gestaltet. Das Minimum, zu  $1^m.78$ , fällt auf 2418, also

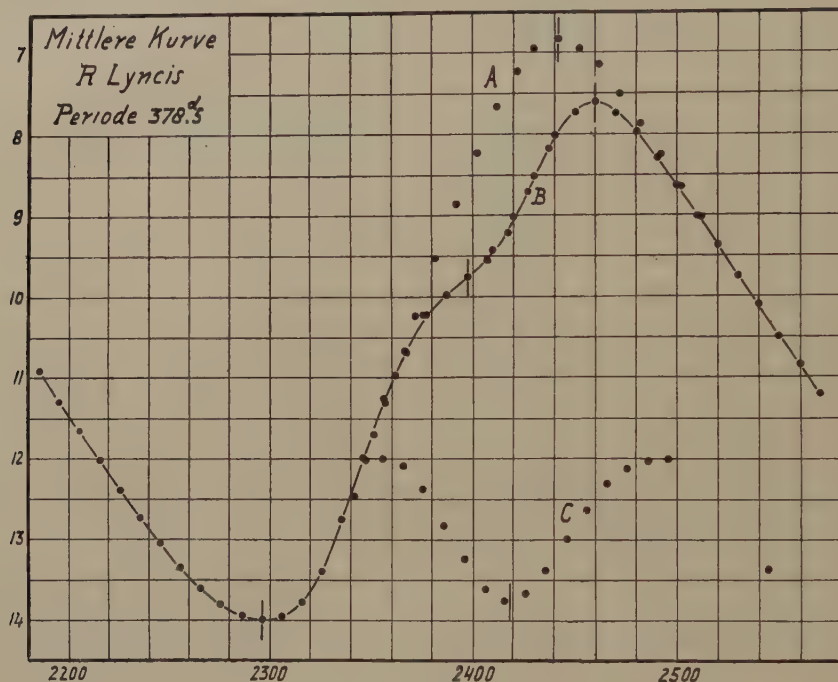


Fig. 2.

24 Tage vor dem ungestörten Maximum; der Veränderliche erleidet beim Aufstieg eine Verfinsterung, welche ihn von 81 % seines Lichtes beraubt.

Utrecht, März 1934.

**Chemistry.** — *Researches on adsorption-electrodes. I. The glass-electrode.*  
By H. J. C. TENDELOO. (Communicated by Prof. H. R. KRUYT.)

(Communicated at the meeting of March 24, 1934.)

It is a well-known fact that glass acts as a hydrogen-electrode. The theory of the glass-electrode has been dealt with in detail by JANSSEN; for the sake of brevity that work may here be referred to. It is also known that the deportment as a hydrogen-electrode begins to show deviations if concentrated solutions of the salts of sodium and potassium are used; the glass then acts as if it were a sodium- or potassium-electrode respectively. Since sodium, potassium, calcium and often other ions, as e.g. zinc, are component parts of the glass, it is obvious that a connection should be looked for between these ions and a specific electrode action of the glass.

The metal-ions in silicates are exchangeable by other ions; this phenomenon is very pronounced in clay, permutites and zeolites, and practically as well as theoretically it is of great importance. We now wondered whether, by exchanging as much as possible the cations present in the capillary layers of the glass by one similar ion, we might be able to make the glass function as an electrode for that ion. We were particularly interested to find whether a glass-membrane, if treated with solutions of calcium chloride, would behave as a calcium-electrode.

For that purpose we made a large number of glass-electrodes, in the manner and according to the model as described by ELEMA. We used the well-known glass of the Corning Glass Works, which has also been recommended by MAC INNES and has the composition  $\text{SiO}_2$  72 %,  $\text{CaO}$  6 %,  $\text{Na}_2\text{O}$  22 %.

In the electrode we poured a solution of an electrolyte, in which then a metallic wire was put. When the electrode had been closed up by means of paraffin, an element was built up in the usual manner with a  $\frac{1}{10}$  normal KCl-calomel-electrode, the e.m.f. of which was measured potentiometrically, amplified by vacuum-tubes. (In the table the e.m.f. of the element is always mentioned.)

For our purpose the glass-electrodes were filled with a solution of calcium chloride, which had been carefully neutralized. In this solution a silver-wire was put, on which electrolytically a thin layer of AgCl had been precipitated. This glass-electrode was placed for some days in a solution of calcium chloride of the same concentration as the solution inside the electrode. When after about five days a daily checking of the potential was started, it appeared that the latter changed until after about ten days a constant value was attained. It also appeared that it was necessary to use new-made solutions.

Just as every glass-electrode cannot be used as a hydrogen-electrode, neither can every glass-electrode be made into a calcium-electrode. The linear relation, which must exist between the logarithm of the ion-concentration and the e.m.f., is very often not found. This relation frequently occurs with a deviation from the ideal relation, but often it also happens that there exists no linear relation at all. If there is a linear relation, but deviating from the ideal course, it signifies nevertheless that the attainment of the ideal line must be considered possible. A large number of electrodes were, therefore, systematically examined; some of these we shall discuss more in detail.

|                              |                  |                                  |
|------------------------------|------------------|----------------------------------|
| Electrode N <sup>o</sup> . 3 | is filled with 1 | normal $\text{CaCl}_2$ solution. |
| „ N <sup>o</sup> . 4         | „ „ „ 0.5        | „ „ „                            |
| „ N <sup>o</sup> . 7         | „ „ „ 0.737      | „ „ „                            |

In the figures the dotted line shows how the ideal line would have to run if the glass-electrode behaved as an ideal calcium-electrode, starting from the same potential and with a change of 29 milli-volt after each



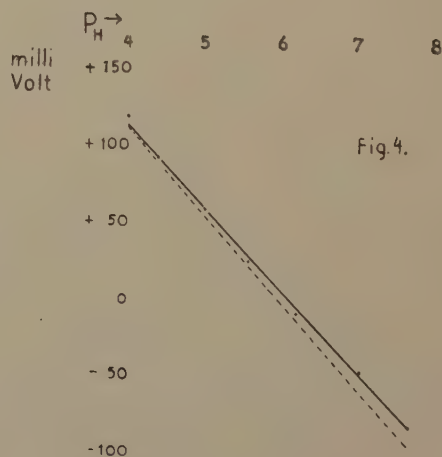
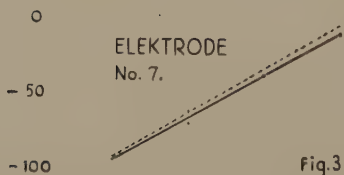
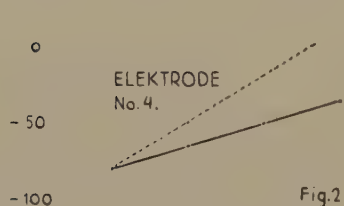
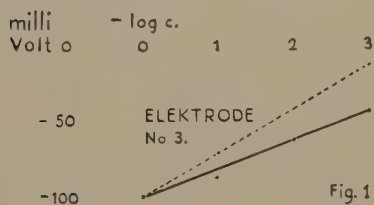
tenfold dilution. We then see that the three electrodes between 1 normal and  $1/1000$  normal calcium nitrate show the desired linear relation; the deviation from the ideal course for N<sup>o</sup>. 7 is very small.

The measured electromotive forces are found in the following table.

TABLE 1.

| Conc. $\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$<br>in normality | Number of the electrodes |         |         |
|--|--------------------------|---------|---------|
|  | 3                        | 4       | 7       |
| 1.0  | — 100 mV                 | — 78 mV | — 92 mV |
| 0.1  | — 84                     | — 65    | — 68    |
| 0.01   | — 61                     | — 50    | — 38    |
| 0.001  | — 42                     | — 36    | — 11    |

In the figures 1—3 the results are reproduced graphically: on the absciss the negative logarithms of the concentrations are to be seen ( $p_{\text{Ca}}$ ).



The following may be observed here.

The equilibrium was at first very slowly attained; this changed perceptibly as the electrode had exchanged more calcium-ions; ultimately the equilibrium was attained after some minutes.

The reproducibility of the separate measurements was 1—2 mV. With  $\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$  solutions, which had been used several times and consequently each time had been in contact with the air, larger differences were sometimes observed.

The accuracy of the measurements is 0.5 mV.

We further noticed that a glass-electrode filled with 1.0 normal KCl and AgCl-Ag-electrode, which, as appears from figure 4 and table 2, behaved as an almost ideal hydrogen-electrode, was unfit for use as a potassium- and as a calcium-electrode.

TABLE 2.  
E. M. F. of an element-glass-electrode-buffer-solution-calomel-electrode  $1/10$  N.  
Glass-electrode filled with 1.0 n KCl—AgCl—Ag.

| $P_H$ | E. M. F. | $P_H$ | E. M. F. |
|-------|----------|-------|----------|
| 4.0   | + 122 mV | 6.2   | — 7 mV   |
| 4.4   | + 97     | 7.0   | — 45     |
| 5.0   | + 61     | 7.6   | — 79     |
| 5.6   | + 28     |       |          |

The ineffectiveness as a potassium-electrode need not surprise us, for the sodium of the glass will either not at all or very incompletely be replaced by potassium. In the light of all that has been said above, it is also evident that this electrode will certainly not be able to function as a calcium-electrode.

For the present we have the indication that a sodium-electrode may be obtained; the above-mentioned linear relation indeed exists, but the deviation from the ideal line is as yet too large.

#### *Summary.*

It appears to be possible to make a glass-membrane function as a calcium-electrode, if the exchangeable ions present in the glass are replaced by calcium-ions.

#### LITERATURE CITED.

- L. W. JANSSEN. Elektrische Grensvlakverschijnselen aan glas. Diss. Utrecht 1933.  
B. ELEMA. De bepaling van de oxydatie-reductiepotentiaal in bacteriëncultures en hare betekenis voor de stofwisseling. Diss. Delft 1932.  
MAC INNES and DOLE. J. A. C. Soc. 52, 29, 1930.

Wageningen, March 1934.

*Laboratory for Physical and Colloid Chemistry.*

**Mathematics.** — *On conformal differential geometry. I. The conformal gradient.* By D. VAN DANTZIG. (Communicated by Prof. J. A. SCHOUTEN).

(Communicated at the meeting of March 24, 1934.)

1. It is generally known that the  $n+2$  homogeneous coordinates  $x'$  of a (hyper)sphere are specially adapted to study problems of conformal geometry in  $n$ -dimensional space  $C_n$ . By means of these coordinates  $C_n$  is mapped on a quadric  $Q_n$  in a projective  $(n+1)$ -dimensional space  $P_{n+1}$ , and the conformal geometry of  $C_n$  is isomorphic with the projective geometry of  $Q_n$  in  $P_{n+1}$ .

In conformal *differential* geometry however the introduction of conformal coordinates leads to several rather exciting difficulties. It has not yet been possible to introduce them otherwise than in the *local* spaces. In the older theories of E. CARTAN and J. A. SCHOUTEN as well as in those of W. BLASCHKE and G. THOMSEN (which latter are restricted to Euclidean spaces), differentiation with respect to the conformal coordinates was not defined at all; only in 1932 T. Y. THOMAS succeeded in finding such a conformally invariant process of differentiation<sup>1)</sup>. The differential operator he introduced however has not the character of an ordinary (or rather projective) gradient, in as much as the functions it generates, as well as those it operates on, are defined on  $Q_n$  only and not in the whole  $P_{n+1}$ .

Hence the problem arises, whether it is possible to define a conformal differential operator, which *really* is a gradient, or, what comes to the same, whether it is possible to extend an arbitrary field, defined for the *points* of the  $C_n$  to a field, defined for the *spheres* of the  $C_n$ . It is this question which I will investigate in this paper. I will restrict myself 1<sup>o</sup>. to scalarfields, 2<sup>o</sup>. to an ordinary ("conformally flat") conformal space  $C_n$ , the extension to "curved" conformal spaces being rather obvious.

2. If  $\xi^h(h, i, j, k=1, \dots, n)$  are ordinary Cartesian coordinates in  $C_n$  and  $a_{ij}$ ,  $a^{ij}$  is the fundamental tensor<sup>2)</sup>, determined but for an arbitrary factor<sup>3)</sup>, the conformal coordinates  $x^\nu$  ( $\nu, \lambda, \mu, \nu=1, \dots, n+2$ ) of a sphere

1) T. Y. THOMAS, Conformal tensors, Proc. National Ac. of Sciences, 18 (1932) 103—112; 189—193.

2) It need not be positive definite, but is supposed not to be degenerated.

3) Instead of the fundamental tensor also its density  $a_{ij} \cdot \alpha^{-1/n}$ ,  $\alpha = \text{Det}(a_{ij})$  may be used. Comp. T. Y. THOMAS, Invariants of relative quadratic differential forms, Proc. Nat. Ac. of Sc. 11 (1925) 722—725.



with centre  $\xi^h$  and radius  $R$  may be given by

$$x^h : u : v = \xi^h : \frac{1}{2} (R^2 - r^2) : 1, \quad r^2 = a_{ij} \xi^i \xi^j \quad (1)$$

The  $Q_n$ , i. e. the set of all spheres of radius 0, is the locus of all  $x^\lambda$  satisfying

$$G_{\lambda\mu} x^\lambda x^\mu = 0, \quad (2)$$

were  $G_{h\mu} = G_{\mu h}$  and

$$G_{ij} : G_{n+1, n+2} = a_{ij} : 1, \quad (3)$$

all other components being zero. The expression

$$\omega^2 = G_{\lambda\mu} x^\lambda x^\mu \quad (4)$$

is invariant;  $R^2 = \omega^2/v^2$ .

3. Now let an arbitrary scalarfield  $f = f(\xi^h)$  be given in  $C_n$ . We will try to find a function  $F = F(x^\lambda)$ , satisfying the following conditions:

1. It is a "spotfunction", i. e. homogeneous of degree zero:

$$F(cx^\lambda) = F(x^\lambda), \quad \therefore x^\lambda \partial_\lambda F = 0 \quad (\partial_\lambda = \partial/\partial x^\lambda) \quad (5)$$

2. It is univalued.

3. On  $Q_n$  it is identical with  $f(\xi^h)$ :

$$F(\xi^h, -\frac{1}{2}r^2, 1) = f(\xi^h) \quad (6)$$

4. Its definition is invariant under arbitrary conformal transformations, i. e.  $F(x^\lambda)$  is a projective scalar, depending only on  $f$  and its derivatives and on  $G_{\lambda\mu}$ .

The simplest way to satisfy condition 4 is to require  $F$  to be a solution of an invariant differential equation. If we require this equation to be linear, we may imply the condition.

5.  $F$  satisfies the differential equation

$$\square F = 0, \quad \square = G^{\lambda\mu} \partial_{\lambda\mu} = G^{\lambda\mu} \partial^2/\partial x^\lambda \partial x^\mu \quad (7)$$

Hence we have to solve the boundary problem of equations (5), (7) with the boundary condition (6).

<sup>4)</sup> We write shortly  $u$  and  $v$  instead of  $x^{n+1}$  and  $x^{n+2}$  resp.

<sup>5)</sup> The equation must be of the second order because equations of the first order, as f.i.  $G^{\lambda\mu} (\partial_\lambda F) (\partial_\mu F) = 0$  do not allow  $F$  to take arbitrary values on  $Q_n$ , whereas equations of higher order allow too high a degree of freedom. Other invariant equations of the second order which suggest themselves are f.i.  $\omega^2 \square F = F$  which however is not regular on  $Q_n$ , or  $\square F = \Phi G^{\lambda\mu} (\partial_\lambda F) (\partial_\mu F)$ , where  $\Phi$  is a function of  $F$ , given once for all. If at least the equation is required to be homogeneous in  $F$  (instead of linear)  $\Phi$  must be  $cF^{-1}$ ,  $c$  being a constant. But then the last equation leads to a function of solutions (viz  $F^{1-c}$  or  $\log F$ ) of the kind we will find. An other possible non-linear equation would however be f.i.

$$G^{\lambda\lambda} G^{\mu\nu} (\partial_{\lambda\mu} F) (\partial_{\lambda\nu} F) = 0.$$

4. Each solution of (5), satisfying condition 2, may be written as  $F = F(\xi^i, \varrho)$ , where we have put  $\varrho = \frac{1}{2} R^2$ . Hence from (1) we get:

$$\partial_\lambda F = (F_i + \xi_i F', F', -\xi^i F_i - \frac{1}{2} (R^2 + r^2) F') v^{-1}, \dots \quad (8)$$

where we have written  $F_i$  for  $\partial F / \partial \xi^i$ ,  $F'$  for  $\partial F / \partial \varrho$ . Hence (7) becomes

$$v^2 \square F = \Delta F + \frac{n-1}{R} \frac{\partial F}{\partial R} - \frac{\partial^2 F}{\partial R^2} = \Delta F + (n-2) F' - 2\varrho F'' = 0, \dots \quad (9)$$

$$\Delta = a^{ij} \partial^2 / \partial \xi^i \partial \xi^j \dots \dots \dots \quad (10)$$

Now putting

$$F = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varrho^\nu, \dots \dots \dots \quad (11)$$

where the  $a_\nu$  are functions of the  $\xi^h$ , (9) becomes

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \{ \Delta a_{\nu-1} + \nu(n-2\nu) a_\nu \} \varrho^{\nu-1} = 0,$$

hence

$$\Delta a_{\nu-1} + \nu(n-2\nu) a_\nu = 0. \dots \dots \dots \quad (12)$$

From (12)  $a_\nu$  can be calculated for  $\nu \neq \frac{1}{2} n$ , hence *always* if  $n$  is uneven. For  $2\nu = n$  (12) gives  $\Delta a_{1/2 n-1} = 0$  hence for even values of  $n = 2m$   $\Delta^m a_0 = 0$ . Combining this result with (6) we find that *for even values of  $n$  the problem is only soluble if  $f(\xi^h)$  satisfies the equation*

$$\Delta^{\frac{n}{2}} f = 0 \dots \dots \dots \quad (13)$$

If this condition is satisfied, *the solution exists but is not uniquely determined*, because in this case (12) does not allow to determine  $a_{1/2 n}$ . Especially for  $n = 2$  and definite fundamental tensor  $f$  must be a *harmonic* function.

We now easily find from (12) the general solution of (5), (6), (7), viz.

$$F = \sum_{i=0}^{1/2 n-1} \frac{(-1)^i (\frac{1}{2} n - i - 1)!}{2^{2i} i! (\frac{1}{2} n - 1)!} R^{2i} \Delta^i f + R^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2} n)!}{2^{2\nu} \nu! (\nu + \frac{1}{2} n)!} R^{2\nu} \Delta^\nu g \quad (14)$$

( $g = 2^{-1/2 n} a_{1/2 n}$ ) if  $n$  is even and  $f$  satisfies (13), and

$$F = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2\nu} \nu! \left( \nu - \frac{n}{2} \right) \left( \nu - \frac{n}{2} - 1 \right) \dots \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \dots \left( 1 - \frac{n}{2} \right)} R^{2\nu} \Delta^\nu f \quad (15)$$

if  $n$  is uneven. In the latter case the second solution is an *uneven* function of  $R$ , which is excluded by condition 2, because the  $x^z$  depend according to (1) only on  $R^2$ .

5. It is easily proved that the series occurring in (14), (15) will converge for sufficiently small values of  $R$  in all points of  $C_n$  where  $f$  is regular. Taking as an example the series (15), let us suppose that

$$f(\xi^i + \eta_i) = \sum \frac{1}{r_1! \dots r_n!} \eta_1^{r_1} \dots \eta_n^{r_n} f_{r_1 \dots r_n} \dots \quad (16)$$

converges for all  $\eta_i$  with  $\sum \eta_i^2 \leq K^2$ . Then the function (16) is uniformly bounded; hence a positive number  $M$  exists<sup>5a)</sup>, such that each term

$$\frac{1}{r_1! \dots r_n!} |\eta_1|^{r_1} \dots |\eta_n|^{r_n} |f_{r_1 \dots r_n}| \leq M \text{ for } \sum \eta_i^2 \leq K^2 \dots \quad (17)$$

Taking especially  $\eta_1 = \dots = \eta_n = K/\sqrt{n}$  we find

$$|f_{r_1 \dots r_n}| \leq r_1! \dots r_n! M (K/\sqrt{n})^{-(r_1 + \dots + r_n)} \dots \quad (18)$$

At the other hand, taking orthogonal coordinates, we have  $a_{ii} = \pm 1$ ,  $a_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ), hence

$$\left. \begin{aligned} |\Delta^\nu f| &= |(\pm \partial_1^2 \pm \dots \pm \partial_n^2)^\nu f| = \left| \sum \pm \frac{\nu!}{r_1! \dots r_n!} f_{2r_1 \dots 2r_n} \right| \leq \\ &\leq \sum \nu! \frac{(2r_1)! \dots (2r_n)!}{r_1! \dots r_n!} M (K/\sqrt{n})^{-2\nu} = \\ &= \frac{\nu! 2^{2\nu} M}{(\Gamma(\frac{1}{2}))^n (K/\sqrt{n})^{2\nu}} \sum \Gamma(r_1 + \frac{1}{2}) \dots \Gamma(r_n + \frac{1}{2}) \leq \\ &\leq \frac{\nu! 2^{2\nu} M}{(K/\sqrt{n})^{2\nu}} \sum r_1! \dots r_n! \leq M \frac{(\nu!)^2 2^{2\nu}}{(K^2/n)^\nu} n^\nu = (\nu!)^2 \left(\frac{2n}{K}\right)^{2\nu} M, \end{aligned} \right\} \dots \quad (19)$$

where we have used the identity  $(2r)! \Gamma(\frac{1}{2}) = 2^{2r} r! \Gamma(r + \frac{1}{2})$  and the inequalities  $\Gamma(r + \frac{1}{2}) \leq r! \Gamma(\frac{1}{2})$  and  $r_1! \dots r_n! \leq \nu!$  whereas the summations in (19) are to be extended on all non-negative integers  $r_1, \dots, r_n$  with  $r_1 + \dots + r_n = \nu$ .

Hence the series (15) is uniformly majorated by the series

$$\left. \begin{aligned} &\frac{M \Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_\nu \frac{R^{2\nu} \nu!}{2^{2\nu} \left(\nu - \frac{n}{2}\right) \dots \frac{1}{2}} \left(\frac{2n}{K}\right)^{2\nu} \leq \\ &\leq \frac{\Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} 2M \sum_\nu \frac{\nu!}{\left(\nu - \frac{n+1}{2}\right)!} \left(\frac{Rn}{K}\right)^{2\nu}, \end{aligned} \right\} \dots \quad (20)$$

which evidently is convergent for  $R < K/n$ .

<sup>5a)</sup> F.i.  $M = \max |f|$  in the domain  $\sum \eta_i^2 \leq K^2$ .



6. Resuming our results, we have proved the theorem:

A function  $f$ , defined and regular in some domain  $d$  of a conformal space  $C_n$ , where  $n$  is an uneven number, may be extended in a way, invariant under conformal transformations to a function  $F$ , defined, regular and univalued in a domain  $D$  of the projective space  $P_{n+1}$  of all spheres of  $C_n$ , containing  $d$ , whereas  $F$  is homogeneous of degree 0, satisfies the equation  $\square F = 0$  everywhere in  $D$ , and coincides with  $f$  everywhere in  $d$ . This extension is uniquely determined. If  $n$  is even such an extension is neither always possible (viz: if and only if  $\Delta^{\frac{n}{2}} f = 0$ ), nor uniquely determined if it is possible. The conformal derivatives, up to the order  $\frac{1}{2}n-1$  however are determined on  $C_n$ .

7. For  $n=0$  the impossibility of extending an arbitrary function  $f$  in any invariant way (Comp. <sup>5)</sup>) is easily proved. In fact, in this case  $P_{n+1}$  is a straight line,  $Q_n$  a pair of non-coinciding points  $A, B$  on this line;  $f$  has given values in  $A$  and  $B$ . But by a projective transformation of the line which leaves  $A$  and  $B$  invariant, any point  $\neq A$  and  $B$  can be transformed into any other. Hence  $F$  must be a constant. But this is only possible if  $f(A)=f(B)$ , a condition taking the place of (13) which loses its sense for  $n=0$ .

For  $n=1$  each "sphere" consists of two points on a line  $C_1$  with coordinates  $\xi+R$  and  $\xi-R$ . The simplest manner of extending a function  $f(\xi)$ , given on this line, consists in taking the mean value of  $f$  in these two points:

$$F(\xi, R) = \frac{1}{2} \{ f(\xi+R) + f(\xi-R) \} \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

This is exactly the extension (15) which we have found above.

For other values of  $n$  the solution (15) is not equal to the mean value of  $f(\xi^h)$  over the sphere  $(\xi^h, R)$ ; moreover this mean value is not a conformal invariant for  $n > 1$ . The integral of  $f(\xi^h)$  however over the interior of this sphere (at least when the fundamental tensor is positive definite), though it neither is a conformal invariant, is always a solution of equations (7), (5), viz.

$$\frac{(\Gamma \frac{1}{2})^n}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)} R^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)}{\nu! \Gamma(\nu+\frac{1}{2}n+1)} \left(\frac{R^2}{4}\right)^{\nu} \Delta^{\nu} f \quad . \quad . \quad (22)$$

The infinite sum in (22) itself is equal to the mean value of  $f$  over the interior of the sphere <sup>6)</sup>. For even values of  $n$  the solution (22) corresponds with the second term in (14), with  $g$ ,  $(\Gamma \frac{1}{2})^n / \Gamma(\frac{1}{2}n+1)$  instead of  $f$ ; for uneven  $n$  it is the solution we have discarded by requiring  $F$  to be univalued.

<sup>6)</sup> This follows from a theorem which will be proved in the "Wiskundige opgaven met oplossingen", 16, (1935) problem N<sup>o</sup>. 100.

8. We might have found the solutions (15), (22) by remarking that the equation (9) may be easily transformed into an equation of BESSEL. The two solutions of (9) may (but for constant factors) be symbolically represented by

$$\left. \begin{aligned} R^{\frac{n}{2}} I_{\frac{n}{2}}(R\sqrt{-\Delta}) f \\ R^{\frac{n}{2}} I_{-\frac{n}{2}}(R\sqrt{-\Delta}) f, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

because the differential operator  $\Delta$  may be treated as a symbolical *constant*, as it commutes with  $\partial/\partial R$ . The first solution (23) corresponds with (22) and exists always, but becomes zero on  $Q_n$ . The second solution (23) is only different from the first one (but for the sign) if  $n$  is *uneven*, in which case it corresponds with our solution (15).<sup>7)</sup>

It is curious that the first solution in (14), the *finite* sum, has no analogon in the theory of ordinary BESSEL equations, because an *ordinary* constant  $\Delta$  would be zero if this were the case with its  $(\frac{1}{2}n)^{\text{th}}$  power (condition (13)).

<sup>7)</sup> NEUMANN's function cannot be used as a solution, because it is singular for  $R=0$ .

**Astronomy.** — *Viscosity and steady states of the disc constituting the embryo of the planetary system.* By H. P. BERLAGE Jr., (Meteorological Observatory Batavia.) (Communicated by Prof. H. A. KRAMERS).

(Communicated at the meeting of March 24, 1934.)

In a previous paper<sup>1)</sup> I have made an erroneous statement concerning the influence of viscosity in the gaseous disc which we have recognized as the embryo of the planetary system. In formula (21) l.c. I naïvely assumed the force with which viscosity acts on the rotating matter of the disc, to be proportional to the density of the gas. It is independent of it. Fortunately the consequences can be proved to be anything but serious.

The right way of dealing with the influence of viscosity on the disc is the following. Every element of an infinitesimal ring with radius  $r$ , expressed in cylindrical coordinates

$$r \, da \, dr \, dh \quad \dots \dots \dots (1)$$

receives, in consequence of the permanent interchange of molecules with

<sup>1)</sup> These Proceedings 35, 1932, p. 554. See also 33, 1930, p. 614 and 33, 1930, p. 719.

the two adjacent rings revolving in the same plane, a quantity of momentum of momentum amounting to

$$\frac{d}{dr} \left\{ \eta r^3 \frac{d\omega}{dr} \right\} dr da dh \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

per second, when  $\eta$  denotes the coefficient of viscosity.

Be  $\lambda$  the mean free path of the molecules,  $u$  their mean thermal velocity,  $\varrho$  the density of the gas, then, according to the kinetic theory of gases

$$\eta = \frac{1}{3} \varrho \lambda u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

When we denote the mass of one molecule by  $\mu$  and its diameter by  $\sigma$ , then

$$\lambda = \frac{3\mu}{4\varrho\pi\sigma^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

or

$$\eta = \frac{\mu u}{4\pi\sigma^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

which is independent of  $\varrho$ .

Introducing the well-known relation

$$u^2 = 3RT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

and dropping numerical constants we get

$$\eta \sim \frac{\mu(RT)^{1/2}}{\sigma^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

We had previously assumed uniformity of chemical composition of the disc, or

$$R = \text{constant} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

and moreover isothermy, or

$$T = \text{constant} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

In this case, as was shown,  $\omega$  is a function of  $r$  only. Consequently there is no friction along planes parallel to the equator. Hence the disc tends to the stationary state in which  $(r)$  disappears, or

$$\frac{d}{dr} \left\{ \eta r^3 \frac{d\omega}{dr} \right\} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$





and decreases successively in radial direction. As, however, the total mass of the system can only be finite if  $\varrho_e$  decreases on an average in outward direction, the final result is an average decrease of  $\varrho_e$  with secondary maxima and minima.

This very kind of fluctuation is shown by the planetary density curve (figure 2b) and in my previous paper I suggested that the fluctuations in the density of the planets in outward direction were probably a consequence of the fluctuations in the density of the gas in the plane of the original disc, because by this assumption the deviations of the radii of the planetary orbits from strict geometric progression could be successfully explained. I was not aware at the time that the parallelism between the radial distribution of the planetary density and the distribution of the density in the gaseous disc is a natural outcome of the fact that the lighter chemical elements will tend to move with the pressuregradient whereas the heavier elements will move against the pressuregradient. Hence the lighter and heavier elements accumulate where equilibrium requires the lower and the higher density of the gas respectively. As the heavier elements are in the mean likewise the elements possessing the higher density in the solid state the parallelism which in my previous paper was shown to be such a useful assumption can be very simply explained.

This, however, also implies that the chemical composition of the disc can never remain homogeneous. The mean molecular weight of the gas will always tend to decrease in outward direction, but only with secondary maxima and minima which are revealed by the planetary density curve. As this conclusion is incompatible with (8) we are obliged to work with a less restricted model of the disc.

Desirous to evade mathematical difficulties, I will, however, assume only such variations of the factors  $R$  and  $T$ , which are compatible with a cylinderwise rotation of the disc. This generalization of our model requires the assumption

$$RT = \text{constant}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

because in this case the equilibrium of the disc is completely determined by (13) as well as in the case when  $R$  and  $T$  are both constant.

Certainly a model of the disc based on (14) is still a too restricted one. It must, however, come quite near to the truth as results from the following argumentation.

The integral of (10) is

$$\omega = \text{constant} \times \int \frac{dr}{\eta r^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

If  $\eta$  is allowed to vary the condition of nearly Keplerian motion (12) can be fulfilled, if only

$$\eta \sim r^{-1/2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Hence, viscosity tends to develop a steady state with

$$\frac{\mu (R T)^{1/2}}{\sigma^2} \sim \frac{\mu^{1/2} T^{1/2}}{\sigma^2} \sim r^{-1/2} . . . . . (17)$$

As the solar radiation received by a volume-element of the disc varies as  $r^{-2}$ , whereas the energy radiated by the element varies as  $T^4$  we may, disregarding variations in the coefficients of absorption and emission, assume as a first approximation

$$T \sim r^{-1/2} . . . . . (18)$$

and hence

$$\frac{\mu^{1/2}}{\sigma^2} \sim r^{-1/4} . . . . . (19)$$

Now, the well known periodicity of atomic volume proves that  $\sigma$  is an oscillating function of  $\mu$ , but does not in the mean increase or decrease with  $\mu$ , so that we may disregard for a moment the fluctuations of  $\sigma$ . Hence, as a first approximation we have also

$$\mu \sim r^{-1/2} . . . . . (20)$$

Consequently,  $T$  and  $\mu$  decreasing both as  $r^{-1/2}$  on an average, we are indeed brought back to our starting point

$$\frac{T}{\mu} \sim R T = \text{constant} . . . . . (21)$$

Let us, after this justification, approach the problem from the empirical side again. According to my previous paper the mass of an infinitesimal ring is

$$dm = (2\pi)^{3/2} \left( \frac{R T}{f M} \right)^{1/2} \varrho_e r^{5/2} dr . . . . . (22)$$

or

$$dm = \text{constant} \times \varrho_e r^{5/2} dr . . . . . (23)$$

The materials out of which a planet is built being gathered from a zone with a width  $\Delta r$  proportional to  $r$ , the expression for the mass of a planet is

$$\Delta m = \text{constant} \times \varrho_e r^{7/2} . . . . . (24)$$

or

$$\lg \Delta m = \lg c + \lg \varrho_e + \frac{7}{2} \lg r . . . . . (25)$$

Substituting in this expression the real masses of the planets<sup>1)</sup> and

<sup>1)</sup> PLUTO'S mass was taken equal to 0.7 times the mass of the Earth.



their theoretical distances we get the values of  $\lg \varrho_e$  which have been plotted in figure 2a. It shows that as a matter of fact  $\varrho_e$  decreases non monotonously with increasing  $r$ . The density of the gas possesses secondary maxima and minima. A smooth curve joining the points oscillates rather systematically about a straight line. Consequently, when overlooking the fluctuations, we get as a first approximation the expression

$$\lg \varrho_e = \lg \varrho_0 - ar \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

or

$$\varrho_e = \varrho_0 e^{-ar} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

when  $\varrho_0$  represents the density in the neighbourhood of the sun. Thus the density in the equatorial plane of the disc decreases in the mean exponentially and I am still confident that this rule will some time be proved theoretically on genetic grounds, although my attempt to do so in my previous paper was shown to be wrong. There is, however, a more serious discrepancy between theory and observation. The maxima and minima of the  $\varrho_e$ -curve do not coincide with the maxima and minima of the planetary density curve as they should have done if our theory was completely adequate.

Perhaps we should have taken the densities of the solid cores of Jupiter and Saturn and not the much lower mean densities of these planets. However, the difficulty is not the absence of parallelism between both curves of figure 2, but the question of how to explain the deviations of the radii of the planetary orbits from a geometric progression if figure 2a is the true  $\varrho_e$ -curve. As far as I can see the only way to remove the difficulty is to assume that the Planetoids do *not* come in the place of a planet intermediate between Mars and Jupiter, but are the non united remains of the gaseous ring which actually produced Mars. The solution is new and unexpected, but deserves attention.

The following table, which should be compared with the analogous one in my previous paper, contains in the first row of figures the present distances of the planets from the Sun in Astronomical Units and in the second row the theoretical original distances of the planets according to a geometric progression with the ratio 1.93.

|          | M    | V    | E    | M    | J    | S     | U     | N     | P    |
|----------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|------|
| Observed | 0.38 | 0.72 | 1.00 | 1.52 | 5.20 | 9.55  | 19.22 | 30.11 | 39.9 |
| Computed | 0.37 | 0.72 | 1.39 | 2.68 | 5.20 | 10.04 | 19.34 | 37.33 | 72.7 |
| Quotient | 1.02 | 1.00 | 0.72 | 0.57 | 1.00 | 0.95  | 0.99  | 0.83  | 0.55 |

The last row contains the ratio of the present and original distances of the planets, showing that Mercury has increased its distance, Venus

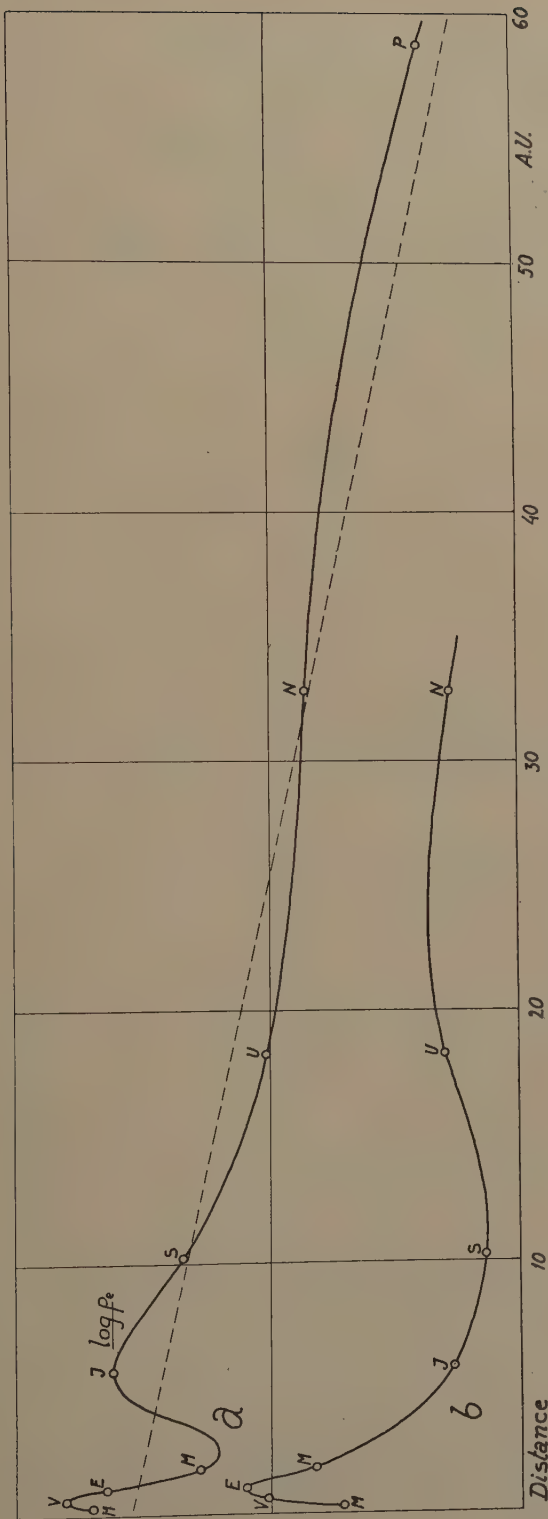


Fig. 2

a. Logarithm of density of gas in equatorial plane of disc.

b. Planetary density curve.

and Jupiter have not moved, whereas the Earth, Mars, Saturn, Uranus, Neptune and Pluto have shifted towards the Sun. These variations are in perfect agreement with the situation of the planets on the  $\varrho_e$ -curve. This suggests that the above mentioned discrepancies will not seriously affect the principles underlying our theory. However, the final decision remaining a matter of future investigation, let us keep for the moment the older point of view regarding the original distances of the planets from the Sun and limit our discussion of the structure and stability of the disc to the approximative case (27).

Substituting (27) in (22) and in the corresponding expression for the moment of momentum of an infinitesimal ring, we get

$$dm = (2\pi)^{3/2} \left( \frac{RT}{fM} \right)^{1/2} \varrho_0 r^{5/2} e^{-ar} dr \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

$$d\theta = (2\pi)^{3/2} (RT)^{1/2} \varrho_0 r^3 e^{-ar} dr \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

The mass and momentum of the whole disc are

$$m = (2\pi)^{3/2} \left( \frac{RT}{fM} \right)^{1/2} \varrho_0 \int_0^r r^{5/2} e^{-ar} dr = (2\pi)^{3/2} \left( \frac{RT}{fM} \right)^{1/2} \varrho_0 \cdot \frac{15}{8} \pi^{1/2} a^{-31/2} \quad (30)$$

$$\theta = (2\pi)^{3/2} (RT)^{1/2} \varrho_0 \int_0^r r^3 e^{-ar} dr = (2\pi)^{3/2} (RT)^{1/2} \varrho_0 \cdot 6 a^{-4} \quad . \quad . \quad (31)$$

By taking the quotient

$$\frac{\theta}{m} = \frac{48}{15} \left( \frac{fM}{a\pi} \right)^{1/2} \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

we find, in a way already followed in my previous paper

$$a = 3.14 \times 10^{-14} \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Substituting this value in the expression for the mass of a planet and assuming for the total mass of the system 446 times the mass of the Earth we get the table (on following page).

Since we have already pointed out why we have provisionally taken into account the average decrease of  $\varrho_e$  and none of its fluctuations, I need not enter again into a discussion of the individual differences between the observed and computed masses. The table should only be taken as a proof that the simplest imaginable radial course of the density of the



| Planet               | Mass (Earth = 1)  |          |
|----------------------|-------------------|----------|
|                      | according to (24) | observed |
| Mercury . . . . .    | 0.08              | 0.03     |
| Venus . . . . .      | 0.57              | 0.82     |
| Earth . . . . .      | 3.45              | 1.00     |
| Mars . . . . .       | 17.9              | 0.11     |
| Planetoids . . . . . | 69.9              | —        |
| Jupiter . . . . .    | 164.5             | 317      |
| Saturn . . . . .     | 158.4             | 95       |
| Uranus . . . . .     | 30.6              | 14.8     |
| Neptune . . . . .    | 0.34              | 17.3     |
| Pluto . . . . .      | 0.00              | 0.7      |

gas in the plane of the disc, an exponential outward decrease, suffices to reproduce the general trend of the planetary masses.

Let us further reconsider the question of stability. The equation representing the radii of the boundaries of zones of stable and instable motion, deduced in my former paper, is

$$fM + RT \frac{d}{dr} \left( \frac{r^3}{\varrho_e} \frac{d\varrho_e}{dr} \right) = 0 \quad . . . . . (34)$$

Substituting (27) in (34) we get

$$fM - 3RT a r^2 = 0 \quad . . . . . (35)$$

This equation has only one solution, which corresponds with the average decrease of  $\varrho_e$  in radial direction and does not interfere with instable zones due to the fluctuations of  $\varrho_e$  which we have neglected.

In order to get numerical results let us suppose that the mean molecular weight of the gas is 40 and its temperature  $300^\circ \text{K}$ . at the distance of the Earth from the Sun. With  $\mu = 40$  corresponds  $R = 2 \times 10^6$  c. g. s. and with  $T = 300$  this yields

$$RT = 6 \times 10^8 \text{ c. g. s.} \quad . . . . . (36)$$

Substituting this value in (35) we get for the critical limit of stability

$$r = 1.5 \times 10^{15} \text{ cm or } 100 \text{ Astron. Units} \quad . . . . . (37)$$

This is a very reasonable result. It shows that without secondary fluctuations of the density of the gas in the equatorial plane, the disc

would have been stable up to 100 A. U. These fluctuations probably have not only induced a zone of turbulent motion where the Planetoids have been born, but have moreover drawn the critical limit of 100 A. U. nearer to the Sun to about, say, 50 A. U. that is at least inside the theoretical distance of the Plutoids from the Sun, which amounts to 58.7 A. U.

It is moreover exceedingly interesting to see what the disc looks like. The density in a given point of the disc is

$$\varrho = \varrho_0 e^{-ar - \frac{fM}{2RT} \frac{h^2}{r^3}} \quad (38)$$

when  $h$  denotes the vertical distance of the point from the equatorial plane; this formula should hold for  $h \ll r$ . The only constant in this expression which we do not know yet is  $\varrho_0$ , the density of the gas in the neighbourhood of the sun. It follows from the formula for the total mass of the planets or  $2.7 \times 10^{30}$  g. (30) which yields

$$\varrho_0 = 1.33 \times 10^{-10} \text{ g cm}^{-3} \quad (39)$$

Changing the density to the base 10 we now get

$$\varrho = 10^{-\left[9.88 + 1.36 \times 10^{-14} r + 4.84 \times 10^{16} \frac{h^2}{r^3}\right]} \quad (40)$$

In a plane through the axis of rotation of the disc lines of equal density are represented by the equation

$$ar + \frac{fM}{2RT} \frac{h^2}{r^3} = \text{constant} \quad (41)$$

or

$$9.88 + 1.36 \times 10^{-14} r + 4.84 \times 10^{16} \frac{h^2}{r^3} = \text{constant} \quad (42)$$

Figure 3 shows a meridional section through the disc. The lines of equal density  $10^{-16}$ ,  $10^{-18}$ ,  $10^{-20}$ ,  $10^{-22}$ , have been drawn, whereas the

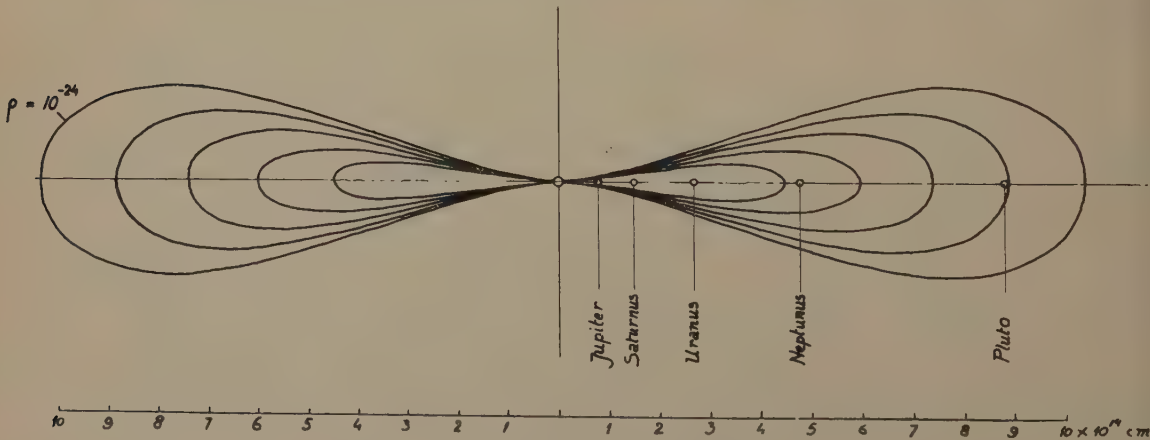


Fig. 3. Meridional section through disc.

outer boundary is assumed to correspond to  $\varrho = 10^{-24}$ , which is the density found by EDDINGTON (Internal Constitution of the Stars p. 382) for the interstellar matter in our Galaxy. Figure 3 contains also the original sites of the planets. The outer radius of the disc amounts to 70 A.U. Hence it appears to be almost beyond doubt that with Pluto or the Plutoids we have actually reached the outmost members of the solar system.

The surfaces of equal density envelop bodies which are more and more flattened the higher the density. Our solar nebula is on the whole a toruslike structure. In my previous paper I pointed out that it is as well a Cartesian whirl as a Kantian disc. Now I want to draw attention to its more than superficial likeness to the oilring in Plateau's well known cosmogonical experiment, which proves that we have gone far towards a coordination of many excellent and only apparently disconnected ideas.

One point awaits still elucidation. Is viscosity capable of transforming a certain solar envelope, which must have been once chaotic and amorphous, into our disc within a reasonable time?

Sir JAMES JEANS has shown that viscosity tends to reduce to half its value the inequality of angular velocity between two points of a gaseous mass at a distance  $r$  apart in a time comparable with (Astronomy and Cosmogony p. 269)

$$\frac{\varrho r^2}{\eta} \dots \dots \dots (43)$$

It may therefore be assumed that in a time comparable with (43) differences between the structure and motion of the original solar envelope and the final disc are reduced to half when the radius and density or the nebula are comparable with  $r$  and  $\varrho$ .

Suppose the total mass of the planets, or  $m = 2.7 \times 10^{30}$  g., distributed in a sphere of radius  $r = 10^{15}$  cm  $\cong$  70 A.U., which was the radius previously obtained, then

$$\frac{4}{3} \pi \varrho r^3 = m \dots \dots \dots (44)$$

or

$$\frac{\varrho r^2}{\eta} \simeq \frac{m}{4r\eta} \dots \dots \dots (45)$$

Let us compute  $\eta$  according to (5), assuming for the total nebula a mean molecular weight of 20 or

$$\mu = 3.32 \times 10^{-23} \text{ g.} \dots \dots \dots (46)$$

When (36) is inserted in (6), we get

$$u = 4.25 \times 10^4 \text{ cm sec}^{-1} \dots \dots \dots (47)$$



We have moreover

$$\sigma \simeq 2.5 \times 10^{-8} \text{ cm} \dots \dots \dots (48)$$

and hence

$$\eta \simeq 2 \times 10^{-4} \text{ c. g. s.} \dots \dots \dots (49)$$

Consequently

$$\frac{\rho r^2}{\eta} \simeq \frac{m}{4 \pi \eta} \simeq \frac{2.7 \times 10^{30}}{8 \times 10^{11}} \simeq 3 \times 10^{18} \text{ sec} \simeq 100 \text{ milliard years.}$$

We are on the safe side when we assume that the regularization of an amorphous solar envelope of the dimensions of the planetary system to the stationary body which we have been studying, by viscosity, is completed in a time 10 times this value or a time of the order of 1 billion years. Now, this order of magnitude is the order of magnitude of the age of a star and not of the age of the Earth and I see no escape from the conclusion that our disc cannot have been a relatively recent acquisition, not much older than the planets, but must have been the product of a secular accumulation of nebulous matter by the Sun during its whole life.

Of course I am fully aware of the difficulty that the starlives of billions of years to which we were accustomed are not easily made consistent with the reduced time-scale which the theory of the expanding universe is now forcing upon us, but I do not hesitate to state the matter as I found it, as long as some other independent arguments for the longer time-scale have not been proved fallacious.

*Batavia, September 1933.*

---

**Palaeontology.** — *Some Rudists from the Alta Verapaz, Guatemala*  
By H. J. MAC GILLAVRY. (Communicated by Prof. L. RUTTEN.)

(Communicated at the meeting of March 24, 1934.)

In his famous works on Central-America, Prof. Dr. K. SAPPER several times mentions the occurrence of Rudists. Some of the fossils collected have been identified as of cretaceous age by ZITTEL (1896, 8a, p. 6; 8b, p. 942; 1899, pp. 15, 40). None of it has as yet been palaeontologically described. Prof. Dr. F. BROILI from the University of Munich sent to me all the material available at the moment. On one of the museum labels one finds the legend: „leg. E. P. D.” Prof. SAPPER kindly explained these initials to me. Several Rudist fragments were given to him in 1923 in Coban, by E. P. DIESELDORFF, who collected them on his estates. All

museum labels are very similar, so I presume that the others belong to the same lot. Prof. SAPPER also sent me a sketch showing the position of the localities, which I herewith reproduce. The exact position of San Diego is unknown also to him. The Rio San Isidoro however is given in his maps. One of the Rudists could be identified with the Jamaican *Biradiolites adhaerens* (WHITFIELD). This agrees wonderfully with the reported occurrence of *Barrettia* near Samac and Campur (1894, 7, p. 9; 1899, 9 pp. 39, 66; 1901, 10, p. 87). These places have been put in the map by myself. I will now proceed to describe the material.

1925 IV, 4, N<sup>o</sup>. 77, San Jacinto Sechol, — A piece of dark coloured, bituminous limestone (cf. 10, p. 87), chokeful with unrecognizable Rudist fragments.

1925 IV, 1, between S. Jacinto and Sachilté, leg. E. P. D., — A piece of very bituminous limestone, a little lighter, but still dark. It is full of fragments of:

?*Praelapeirousia* spec. (figs. 1—3) — A small slender Rudist. Sections



#### EXPLANATION OF TEXTFIGURES.

- Fig. 1. ?*Praelapeirousia* spec. showing the two shell layers.  
 Fig. 2. Tectonically compressed second individual of same species. Only a few cells and L visible. Longest diameter 25 mm.  
 Fig. 3. Third specimen. Siphonal area, just opposite L.  
 Fig. 4. *Biradiolites* from Guatemala. Sliding notches and E well visible.  $\frac{1}{2} \times$  natural size.  
 Fig. 5. *Sauvagesia* spec. with fig. 6: Ligamental ridge enlarged.  
 Fig. 7. Unrolled curve described by a growth layer of *Biradiolites adhaerens* from Guatemala.  $\frac{1}{2} \times$  natural size.  
 Fig. 8. Same for the Jamaica sample A.  $\frac{1}{2} \times$  natural size.

Figs. 1—6 from sections, 1—3 and 6—8 sketched.

show irregular polygonal cells, rather large, and few in number. Ligamental inflexion present. Fig. 3 shows some similarity to WIONTZEK's *Praelapei-rouisia* (13, p. 29, fig. 20). The line of demarcation in this case, however, may be a growth layer intersected by the section. In that case the animal would be a *Sauvagesia*. The most curious feature is the compact cortical layer seen in some samples (figs. 1—3) which fills up the grooves of the outer shell layer. This gives to the weathered outer surface a curious *Pironaea*-like aspect: compact longitudinal lines, with guirlandes (of the funnel plates) between. The thickness of the funnel plates is  $\frac{1}{7}$  mm. They stand at a  $40^\circ$  to  $50^\circ$  angle to the shell axis in one sample. The cells are  $\frac{1}{2}$ —1 mm wide. The diameter of the valve varies from 25—40 mm.

1925 IV, 2, Nos. 88a, 89, 90, San Diego, — a) A Rudist fragment, inbedded in somewhat bituminous white limestone:

*Sauvagesia spec.* (figs. 5, 6) — This animal has a very distinct ligamental crest, which is obliquely truncated at the end (fig. 6). The length of this ligamental crest is 6 mm. The minimum thickness is  $\frac{1}{3}$  mm. The oblique line bordering its end is  $\frac{3}{4}$  mm long. The inner shell layer is crystallized and  $\frac{1}{2}$  mm thick. The outer shell layer is about 13 mm at its thickest (dorsal side). It shows clearly the polygonal reticulation. The polygonal cells are  $\pm \frac{1}{2}$  mm wide. Towards the outer margin in one place, however, there is a distinct radial arrangement of the prismatic cells (Pl. I, fig. 5). The funnel plates stand more or less at right angles to the shell axis. They are broadly undulated. Their thickness is about  $\frac{1}{4}$  mm. In some places the shell appears to be bordered on the outside by a distinct compact crystalline shell-layer equalling the inner shell-layer in character and thickness (drawn, not dotted, in fig. 5). This is a very curious feature, not found to my knowledge in other *Sauvagesiae*. Outer surface not preserved or thickly inbedded. Contours obtusely angular. The body cavity is filled with limestone and full of irregular curving calcite laminae, showing that the fragment belongs to the lower end of the valve. Accordingly nothing can be found of the cardinal apparatus. At the end of the ligamental inflexion there is either a small cavity or a small patch of clear calcite. The diameter of the body-cavity is 38 mm. Its shape is a straight cylinder. Consequently it is very difficult to discern the direction of growth. From the only vessel-impression visible (and not so well visible either), however, I conclude that the figs. are in the habitual position, i.e. the upper part of the shell is on the side of the reader, as I consider that a furrow lies on the upper side of a funnel plate, a corresponding ridge on the other). The form of the prismatic cells however points the other way (considering that they are convex at the base). However this may be the figure does not change much if we reverse it. The systematic place is uncertain, but the general appearance is that of a *Sauvagesia*, which view is confirmed by the polygonal reticulation.

b) A Rudist shell fragment, (Pl. I, fig. 4), — The fragment shows one only fold of the growth layers. This fold is 5 to 80 mm broad and 5 to



H. J. MAC GILLAVRY: SOME RUDISTS FROM THE ALTA VERAPAZ,  
GUATEMALA.



EXPLANATION OF PLATE.

- Fig. 1. *Biradiolites adhaerens* from Guatemala. Siphonal area.  $1,1 \times$  nat. size.  
 Fig. 2. *Saem* specimen anterior side, showing the suggestions of ribs.  $\pm$  nat. size.  
 Fig. 3. *Biradiolites adhaerens*, Jamaican sample A, Siphonal area.  $1,1 \times$  nat. size.  
 Fig. 4. *Rudist* shell fragment from San Diego, with upfolding and ribs.  $\frac{2}{3} \times$  nat. size.  
 Fig. 5. *Sauvagesia* spec. The only place where a radial arrangement of the prismatic cells occurs. The body cavity is at the lower left of the fig. Enlarged.



10 mm high. It may be a first fold, but I think it more probable that it is one of the siphonal bands, as it is very conspicuous in comparison with the rest. Again the shell is cylindrical, though curved in this case, the convex side only being preserved. The funnel plates stand at a  $30^\circ$  or  $40^\circ$  angle to the shell axis. This gives a rather reliable indication as to what is the upper side of the shell, as mostly the funnel plates spread upwards away from the interior. The ?siphonal band, then, would be S and correspond to an upfolding of the growth layers, a saddle! As far as preserved (a little less than  $180^\circ$ ) the inside of the shell shows no trace of a ligamental ridge, nor of the cardinal notches. The outer shell layer is 15 mm at its thickest. The funnel plates are very thin,  $\frac{1}{15}$ — $\frac{1}{20}$  mm. They are very narrowly undulated. The outer surface shows longitudinal ribs corresponding to the saddles of these undulations. They are very straight and regular and interspaced by grooves of the same width. Both are rounded. There are 6 ribs in 10 mm. They are crossed by some six imbricating growth layers and some minor ones. The prismatic cells are mostly radially arranged, irregularly long and slender in section. Only near the body cavity they are polygonal. The diameter of the body cavity is 28 mm., the length of the fragment 70 mm. I am absolutely at a loss to place it systematically. The extreme regularity of the ribs points to a *Sauvagesia* or *Durania*, but this is made impossible by the arrangement of the prismatic cells.

1925 IV, 3, N<sup>o</sup>. 771, San Diego, Rio San Isidoro., — *Biradiolites adhaerens* (WHITFIELD) TRECHMANN (figs. 4, 7; Pl. I, figs. 1, 2), — (For the bibliography of the species see KÜHN, 4, p. 83). One probably complete lower valve. I have for comparison two lower valves of this species from Catadupa, Jamaica, which Dr. F. RUTSCH of the Naturhistorisches Museum in Basel sent to me. They were collected by P. W. JARVIS in 1927 and belong to the collections mentioned by TOBLER (11). In all samples the typical development of the siphonal bands is very distinct: the anterior *E* is flat and ribbed longitudinally, the posterior *S* smooth and cordlike. TRECHMANN's description states the very reverse, but he assures me (in litt.) that his samples are all as in my photographs. The difference was caused partly by a different opinion as to which is the anterior and which the posterior. The same nomenclature has been adopted by WIONTZEK (13, p. 7). Something is to be said for either method, the classical one of TOUCAS, DOUVILLÉ etc., the other of TRECHMANN and WIONTZEK. It will be better to avoid confusion and speak only of *S* (exhalent, bande anale, Analband) and *E* (inhalent, bande respiratoire, Kiemenband). In the same letter Dr. TRECHMANN says about the species *adhaerens*, *coryi* Tr. and *semiannulosus* Tr. that they "may be only varieties or subspecies of one another". I quite agree with this, the difference being small, and thus have no difficulty in bringing the Guatemala form to the specific name *adhaerens*. To which variety it belongs cannot be ascertained, as the upper valve is not preserved. By its great size and the embryonal ribs it probably is a *forma nova*. The species belongs to TOUCAS' (TOUCAS, monogr. p. 114)

fifth group, the group of *Bir. ingens*. I will now proceed to give a detailed description of the San Diego sample.

The growth layers show the three folds typical of this and the fourth group, (fig. 7). They come to a sudden end against the siphonal bands, that occupy the whole space between the folds. Only a few growth layers faintly cross these bands. The bands themselves correspond to steep-edged upfoldings of the funnel plates. *E* bears 7 ribs corresponding to the sinus of small undulations of the funnel plates. At the upper end of the valve the bands spring up like little horns. The funnel plates start upwards away from the inner shell layer, but almost immediately gracefully curve to a position at right angles to the shell's axis. They even may slope downwards near the outer margin. In the three folds they immediately slope steeply downwards. Their thickness varies much, but is mostly less than  $\frac{1}{10}$  mm down to  $\frac{1}{20}$  at least. They are regularly undulated except in the three folds. These undulations may bifurcate outwards. There are some 6 of them pro 10 mm. Their saddles correspond to suggestions of ribs on the outer surface (Pl. I, fig. 2) The prismatic cells are concentrically arranged near the body cavity, and irregularly long and slender. Further outwardly they are polygonal reticulate, in some places up to the outer margin. In the dorsal area, however, they are radially arranged, irregularly long and slender, from 10 mm from the outer margin onward, mainly along the saddles of the small undulations. In the sinus between they mostly are still polygonal reticulate. The diameter of the polygonal cells is about  $\frac{1}{5}$  mm, they thus are much more wide than high. No vessel impressions are visible. The inner shell layer is about  $\frac{1}{4}$  mm thick, crystalline and longitudinally striated. In section one sees the sliding notches for the teeth of the upper valve (fig. 4). There is no ligamental ridge. Cardinal apparatus wanting, together with the whole upper valve. Body cavity subcircular. The shape of the lower valve is that of a cone with a very small angle. Body cavity and outer shell increase almost at the same rate. The valve is a little curved, with the siphonal bands on the convex side. Seen from the apex upwards a little torsion in the direction of the clock may be seen. There are about 12 imbricating growth layers and several minor ones.

The Jamaican sample A (Pl. I, fig. 3; textfig. 8) differs in some respects: *E* bears only 5 ribs (cf. 12, p. 401). The funnel plates are possibly still thinner. The prismatic cells are at the outset polygonal reticulate and on the whole more radially arranged outwardly. Near the anterior fold these "stripes" turn in a tangential direction and then down into the anterior fold. Along 10 mm of the hollow dorsal side two grooves are seen like those of *Bir. cancellatus* (WHITF.) DOUV. and *subcancellatus* TRECHM. Both A and B are hollow at the dorsal side, but this of course depends largely on the substratum. Dorsally they are taller than ventrally. Like those of TRECHMANN they are both smaller than the San Diego form. I will give some measures in a table, for comparison.



|  | San Diego     | Catadupa A    | Catadupa B     |
|--|---------------|---------------|----------------|
| Length of valve dorsally:  | 85            | 50            | 52             |
| idem interbande:   |               | 36            | 37             |
| Diameter of valve along a line drawn through I, and at right angles to this: | 44 40         | 37 53         | 24 38          |
| Diameter of body cavity, same directions:                                    | 21 19         | 17 19         | 17 20          |
| Thickness of shell, maximal:   | 17 (dorsal)   | 18 (anterior) | 14 (posterior) |
| idem minimal:  | 6 (S and E)   | 5 (E)         | 3 (S)          |
| Breadth of E with number of ribs:  | 8 with 7 ribs | 8 with 5 ribs | 6,5            |
| Breadth of S:  | 5             | 4             | (3)            |
| Number of undulations:   | (30)          | 20            | —              |

I fully realise, that in retaining this form with its ribbed siphonal band and almost wholly reticulate limbus in the genus *Biradiolites*, I may increase the already existing confusion prevailing about the Rudist genera. But first of all there are the Jamaican forms of the same species with their prismatic cells more radially arranged, and further the species is so obviously related to other *Biradiolites*, that even to constitute a new subgenus for it would appear artificial. The more so, as recently another form has been described (WIONTZEK, 13, p. 16) with the inhalent band *E* bearing five ribs. This form, though only partly preserved could be identified as a *Biradiolites*, and even of a wholly different group of this genus. This makes it far more probable, that the ribbing of the siphonal bands is rather accidental.

*The age question:* On SAPPER's geological map (1901, 10) it is shown, that tectonics are surely not simply monoclinal. Information about the age therefore may not be gained from the localities. The fauna of San Diego and of Samac and Campur may be compared with those of Jamaica and Cuba. About the age of the Jamaican Cretaceous a controversy existed between H. L. HAWKINS and C. T. TRECHMANN. HAWKINS (3, pp. 315, 323) considers the highest estimate possible (on Echinoid evidence) to be Turonian, but thinks an earlier age quite well possible. Geologically the Rudist limestones are unconformably overlain by tertiary limestones. Thus geologically an upper margin cannot very well be established. TRECHMANN gives several arguments for a Maestrichtian age. I can only judge his second argument, which certainly is not right. Ligamentless Radiolitidae have been described from the Cenomanian or even the Albian. We thus

must turn to Cuba. In 1933 parts of Cuba were surveyed by Prof. L. RUTTEN and four of his students including myself. The results will be published afterwards. A preliminary account by RUTTEN has already appeared (6). Diverse species of *Barrettia* occur in the transgressive uppermost Cretaceous mentioned on p. 49. They occur thus in the Maestrichtian. To define their earliest appearance is much more difficult, as things are rather complicated, and as yet we had time only to examine part of the material collected. As far as can be judged at present the time scale drawn by DOUVILLÉ (2, pp. 50, 51) is not confirmed by the fieldwork. BOISSEVAIN and MAC GILLAVRY partly based their stratigraphical conclusions on DOUVILLÉ (1, p. 1312). PALMER (5, p. 95) mentions a Maestrichtian age for the many Cuban Rudists he describes, but gives no arguments. It may be mentioned, that TOUCAS stipulates a Danian age for several Rudists. This view, however, is held no longer (cf. 4, pp. 182—187).

The San Jacinto and Sachilté darker limestones are probably older. *Praelapeirousia* is a Santonian, *Sauvagesia* an Albian-Santonian and ?Campanian genus.

#### BIBLIOGRAPHY.

1. BOISSEVAIN, H. and MAC GILLAVRY, H. — 1932, Kon. Ak. v. Wet. Amsterdam. Proc. Vol. XXXV, N<sup>o</sup>. 10, 1932, pp. 1303—1312, 6 textfigs.
2. DOUVILLÉ, H. — 1927, Bull. Soc. Geol. d. Fr. (4), T. XXVII, 1927, (12 août 1926) pp. 49—56, Pl. IV, 2 textfigs.
3. HAWKINS, H. L. — 1924, Geol. Mag. Vol. LXI, N<sup>o</sup>. 7, July 1924, pp. 312—323.
4. KÜHN, O. — 1932, Fossilium Catalogus I: Animalia, Pars 54: Rudistae.
5. PALMER, R. H. — 1933, Nuevos Rudistas de Cuba. — Revista de Agricultura, Vol. 14, Nos. 15 y 16, 1933, pp. 95—125.
6. RUTTEN, L. — 1933, Algunos resultados de las investigaciones geológicas de la comisión científica Holandesa en Cuba. — Revista de la Soc. Geogr. de Cuba, Año VI, 1933, Num. 3, Julio, Agosto y Septiembre. pp. 46—52.
7. SAPPER, K. — 1894, Grundzüge der physikalischen Geographie von Guatemala. Erg. h. 113 Petermanns Mitt. pp. 1—59, Erg. Bd. XXIV, Gotha 1894.
- 8a. ——— — 1896, Sobre la Geografía Física y la Geología de la Península de Yucatán, Inst. Geol. de México, 1896 México.
- 8b. ——— — 1896, Pt. I translated: Geology of Chiapas, Tabasco and the Peninsula of Yucatan. Bol. Inst. Geol. Mex. 3, 1896 in: Journ. of Geol. IV, p. 938, 1896.
9. ——— — 1899, Über Gebirgsbau und Boden des Nördlichen Mittelamerika. Erg. H. 127 zu Petermanns Mitt., Erg. Bd. XXVII, Gotha 1899.
10. ——— — 1901, Die Alta Verapaz (Guatemala). — Mitth. d. Geogr. Ges. in Hamburg, Band XVII, pp. 78—224, Hamburg 1901.
11. TOBLER, A. — 1928, Demonstration einiger mittelamerikanischer Rudistenfaunen. Eclogae geol. Helvetiae, Bd. 21, N<sup>o</sup>. 1, 1928, pp. 216, 217.
12. TRECHMANN, C. T. — 1924, Geol. Mag. Vol. LXI, N<sup>o</sup>. 9, Sept. 1924, pp. 385—410.
13. WIONTZEK, H. — 1933, Rudisten aus der oberen Kreide des mittleren Isonzogebietes. Palaeontographica. Bd. LXXX, Abt. A.

**Physiology.**— *Experiments on rats about the part of sodium in metabolism*  
By P. SCHOORL. (Communicated by Prof. G. GRYNs.)

(Communicated at the meeting of March 24, 1934.)

For two reasons previous investigations on the part of sodium in metabolism have been hardly successful: the absence of an exact practical method for sodium determination and the difficulty to compose a sodium-deficient diet. Since a simple method for quantitative sodium determination is published by BLANCHETIÈRE (1923), modified by KAHANE (1930) and later by G. B. v. KAMPEN and L. WESTENBERG (1932) and we had a ration not merely of purified foodstuffs but also low in sodium, we began a series of experiments about the part of sodium in metabolism.

OSBORNE and MENDEL (1918) stated that rats grow normally on a ration with 0.035 % Na. JOHN's results (1928) are not in agreement with the experiments of OSBORNE and MENDEL (1918), for JOHN reports that 0.5 % Na is hardly enough, while 0.3 % Na is insufficient for normal growth. MITCHELL and CARMAN (1926) report a percentage of 0.4 % Na as sufficient and 0.047 as insufficient. They do not prove, however, that the decreased growth is caused by Na deficiency, while the chloride percentage is low, too, and they did not try to meet the Na deficiency by another Na salt than NaCl. MILLER (1926) noticed decreased growth on a corn diet containing 0.03 % Na while normal growth was already reached on a diet with 0.07 % Na. Later experiments of the *same author* (1926) show that the lack of NaCl can be supplied by  $\text{Na}_2\text{SO}_4$  and by  $\text{Na}_2\text{CO}_3$ . Besides the abnormally low growth MITCHELL and CARMAN (1926) also reported equal food-intake for growing and not growing animals. KELLNER (1917) already stated that Na is needed for several digestive juices. Many experiments were carried out to study the influence of NaCl on the digestion of the food, e.g. by WOLFF and EISENLOHR (1893), WEISKE (1874), HOFMEISTER (1873), WOLFF and KREUZHAGE (1895). The conclusions from these experiments are conform: influence of more or less NaCl on digestion of the food cannot be demonstrated. However, the experimentalists did not prove that the pretended NaCl paucity of the ration is really a Na deficiency.

MILLER (1926) reports about the sterility of female rats on a diet consisting for 80 % of corn. He concluded that sodium deficiency should be the cause. About the influence of other minerals on the quantity of Na needed for normal living conditions BUNGE (1873) already supposed that the potassium content of the food would be of importance for the want

of sodium. According to BUNGE potassium salts e.g.  $K_2CO_3$  enters into the blood after being resorbed and decreases the NaCl content of the blood by forming  $Na_2CO_3$  and KCl.  $Na_2CO_3$  in higher concentration is secreted by the kidneys as well as the KCl and the blood has lost Na and Cl. Large quantities of K salts as in vegetable food should cause an increased need of Na salts. According to TERROINE and REICHERT (1930) the K/Na ratio has to be not higher than 3, while SASAKI (1925) finds a ratio of 1.5. According to OLSON and JOHN (1925) the ratio has to be almost 0.6 (and not higher than 1.4). RICHARDS, GODDEN and HUSBAND (1927) mention a ratio of 1.6. These four quoted ratios do not differ very much, but they are not quite consistent. MILLER (1923) moreover reports that a ratio of 14 is not disadvantageous. THEILER and DUTOIT (referred to by TERROINE and REICHERT 1930) state that much sodium is harmless for cattle, while SJOLLEMA (1932) concludes that much K would cause "scouring" in cattle (K/Na ratio of 40).

Our own experiments demonstrate that on diet 72 (400 gr. rolled oats, 16 gr. crude milk albumin and 2 gr. cod liver oil) in which the Na percentage amounts to 0.011, growth is very low (average out of 31 animals  $5.1 \pm 0.22$  gr. a week). Normal growth on our stock diet amounts to almost 25 gr. This low increase of body weight was not always observed. Only when we used new cages or cages made of rustproof material (pure nickel) growth was low. In ordinary cages, already used for other experiments growth amounted to 16 gr. a week, in spite of the fact that all our cages are carefully cleansed after each experiment. In our experiments young rats showed good growth on a diet with a sodium percentage of 0.2 %. This percentage, however, is possibly insufficient at an older age for we noticed that rats of higher weight need more sodium than small ones. Many precautions should be taken to prevent the rats from getting sodium in an other way than with the food. For instance: weighing the rats every day can increase growth for they lick NaCl from the hands and the balance, when these are not well cleaned.

On diet 78 (400 gr. rolled oats, 16 gr. purified milk albumin and 2 gr. cod liver oil) in which the Na percentage amounts to 0.009 %, a standstill in growth is reached within 10 weeks at a body weight of about 60 gr. (see fig. I, curve 1).

We proved that the growth-limiting factor is really sodium for NaCl as well as  $NaNO_3$ ,  $NaHCO_3$ ,  $Na_2HPO_4$  12 aq.,  $Na_2SO_4$  and Na-citrate promote growth (see fig. I, curve 2, 3, 4, 5 and 6). We demonstrated also that Na as related to growth cannot be replaced by K or Li.

A most striking point in our sodium-deficiency experiences is the nearly normal food intake of a good deal of our rats on Na deficient diet as compared to the intake of rats on the same diet supplemented with Na. While food intake and digestion are normal, growth is nihil. In table I the digestion percentages of sodium-deficient and sodium-sufficient food are compared. There is hardly any difference.



TABLE I.

|                             |   | Na deficient period |          | Na sufficient period |          |
|-----------------------------|---|---------------------|----------|----------------------|----------|
|                             |   |                     | Digested |                      | Digested |
| First experiment (10 rats)  | Weekly intake of food in gr. (dry matter) . . . . .               | 440                 | 92 %     | 580                  | 93 %     |
|                             | Weekly secreted faeces in gr. (dry matter) . . . . .              | 33.5                |          | 39                   |          |
|                             | Weekly intake of food protein in gr. (6.25 $\times$ N) . . . . .  | 81                  | 83.5 %   | 107                  | 87 %     |
|                             | Weekly secreted faeces protein in gr. (6.25 $\times$ N) . . . . . | 13.4                |          | 14                   |          |
| Second experiment (10 rats) | Weekly intake of food in gr. (dry matter) . . . . .               | 420                 | 93 %     | 640                  | 92 %     |
|                             | Weekly secreted faeces in gr. (dry matter) . . . . .              | 27.5                |          | 48.5                 |          |
|                             | Weekly intake of food protein in gr. (6.25 $\times$ N) . . . . .  | 78                  | 88 %     | 118                  | 86.5 %   |
|                             | Weekly secreted faeces protein in gr. (6.25 $\times$ N) . . . . . | 9.5                 |          | 15.5                 |          |

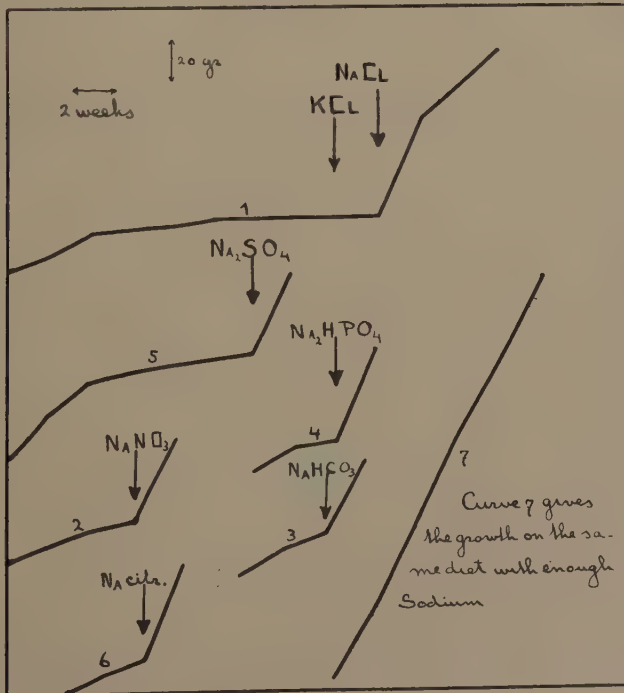


Fig. 1.

What does happen to the digested foodstuffs? In the Na deficient period the percentages of the digested food as well as of the protein are the same as in the sodium-sufficient period. In the first period the daily protein intake for one rat amounts to almost 1 gr. (body weight of the 10 rats used was 60 gr. see curve I). Probably this quantity is much more than is necessary for maintenance. We now made the following supposition: if — in consequence of the Na deficiency — the rats resorb a lot of protein while they do not grow, all the protein nitrogen must be found back in the urine. Experiments in this direction with 12 rats (see table II) show that the greater part (86 %) of the resorbed protein nitrogen could really be found back. Several attempts to find back all the nitrogen were without success, for the 12 individual protein-metabolism experiments gave almost the same percentage of nitrogen in the urine. A methodical error is not very probable. Further experiments in this direction are arranged. *It is our opinion that the conclusion that Na in protein metabolism is needed to enable the organism to use the resorbed protein for building up body protein, is justified.*

The data in table II show that there is an important difference in the percentage of protein ( $6.25 \times N$ ) found back in faeces and urine, without and with Na. Without Na we calculated an average of  $86 \pm 1.8 \%$  and with Na  $62 \pm 3.6 \%$ .

As sodium deficiency prevents the organism from making use of the resorbed proteins, we studied the way in which the nitrogen leaves the body. The urine of the sodium-deficient rats does not contain any proteins (tested with trichloroacetic acid). All the excreted nitrogen is found back in the form of urea. In cases of "Urémie par manque de sel" (BLUM. Le rôle du sel dans les nephrites. Parys. 1931), different views about this complex of symptoms are given. The greater part of the investigators holds that retention of urea, in combination with lack of NaCl, is caused by a decreased activity of the kidneys or by an increased protein decomposition. Others mention that uraemia arises in consequence of lack of liquid combined with disturbance of the function of the kidneys. The opinion that "Urémie par manque de sel" only arises when much NaCl has left the body in consequence of acidosis is supported by BLUM.

Our experiments on the rôle of sodium in protein metabolism, suggested that uraemia combined with shortness of NaCl, may be caused by Na deficiency. This view should explain why not always correlation is found between the Cl content and the increase of the urea content of the blood (MEYER. Klin. Wochenschr. 10, 155, 1931.) and why injections of NaCl solution are able to improve the condition. However, when the kidneys are diseased the excess of Cl is an inconvenience.

The prescription of a diet, poor in NaCl during pregnancy in order to spare the kidneys, may increase the urea formation by the liver. After partus the same shortness of NaCl may lead to lack of milk secretion. Instead of NaCl other Na salts are desirable.

TABLE II.

| Number of the rat | Weekly protein intake<br>( $6.25 \times N$ )<br>in gr. | Weekly excretion<br>of nitrogen; calcu-<br>lated as protein<br>( $6.25 \times N$ ) in gr. | Protein<br>retention in gr. | Weekly<br>growth in gr. |
|-------------------|--|---|-----------------------------|-------------------------|
| 3783 without Na   | 10.3   | 7.9   | 2.4                         | + 3                     |
| „ with Na         | 11.5   | 6.1   | 5.3                         | + 24                    |
| 3792 without Na   | 9.8  | 7.5   | 2.3                         | — 4                     |
| „ with Na         | 11.5   | 6.2   | 5.2                         | + 19                    |
| 3786 without Na   | 9.6  | 8.8   | 0.8                         | + 3                     |
| „ with Na         | 11.5   | 5.7   | 5.8                         | + 22                    |
| 3787 without Na   | 9.9  | 8.0   | 1.9                         | + 5                     |
| „ with Na         | 11.5   | 6.1   | 5.3                         | + 22                    |
| 3666* without Na  | 9.4  | 8.6   | 0.8                         | — 3                     |
| „ with Na         | 11.4   | 9.2   | 2.2                         | + 14                    |
| 3668* without Na  | 9.3  | 8.1   | 1.2                         | — 6                     |
| „ with Na         | 11.4   | 8.9   | 2.5                         | + 4                     |
| 3670* without Na  | 9.3  | 6.9   | 0.2                         | 0                       |
| „ with Na         | —  | —   | —                           | —                       |
| 3672* without Na  | 10.0   | 8.6   | 1.4                         | + 1                     |
| „ with Na         | —  | —   | —                           | —                       |
| 3927 without Na   | 7.8  | 6.7   | 1.1                         | — 1                     |
| „ with Na         | 13.8   | 9.0   | 4.8                         | + 26                    |
| 3928 without Na   | 7.4  | 6.4   | 1.0                         | — 4                     |
| „ with Na         | 13.8   | 10.0  | 3.8                         | + 25                    |
| 3929 without Na   | 8.2  | 7.1   | 1.1                         | — 5                     |
| „ with Na         | 13.8   | 7.3   | 6.5                         | + 32                    |
| 3923 without Na   | —  | —   | —                           | — 2                     |
| „ with Na         | 13.8   | 8.4   | 5.4                         | + 31                    |

Besides the rôle of Na in protein metabolism, we examined the influence of Na on other physiological actions e.g. on reproduction. For this purpose we kept 8 female rats on ration 78. During a short period a Na addition was administered till the rats had a live weight of  $\pm 160$  gr. After this period they got only diet 78 with a sodium percentage of 0.009 %. The

same ration was given during pregnancy. We now perceived the following details: (see fig. II.)

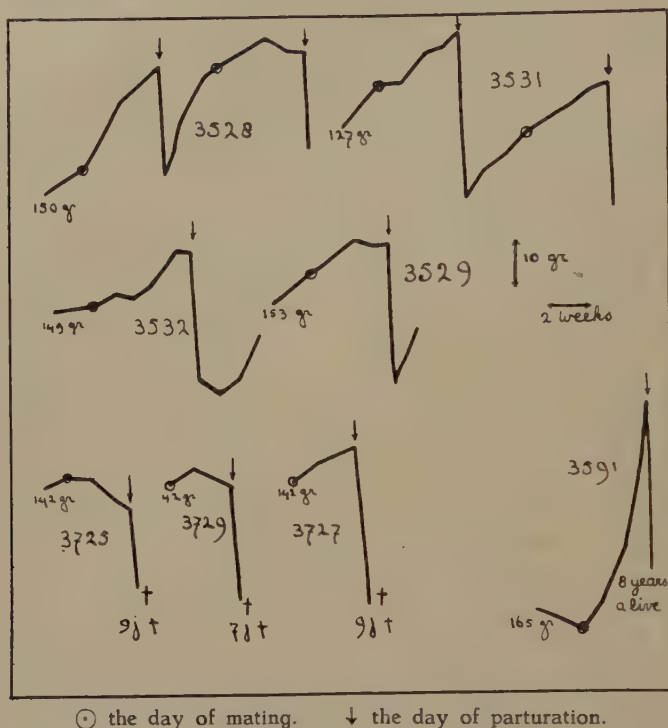


Fig. 2.

1. After insemination (controlled by microscopical vaginal smear tests) increase of weight was extraordinarily small. In 11 cases this increase amounted to 8.6 gr. (normal increase varies from 40—60 gr.)

2. Loss of weight caused by parturition amounted to 29 gr.

3. The number of young born generally could not be determined, because mostly some were partly and others probably wholly devoured before we found the litter.

4. During the last part of pregnancy and directly after parturition the animals were very thin.

5. The Na content of young, born under Na deficient conditions, amounts to 1.3 mg. Na for each gr. of body weight against 1.7 mg. for normal young.

6. Rats with a small increase in body weight, probably due to small gifts of Na, give birth to normal young in all respects and are not badly influenced themselves. Rats showing loss of weight during pregnancy die during partus and the young are dead too. The number of young found by section was 9, 7 and 9 with a body weight of 3.8 gr.

Our conclusion concerning the influence of Na deficiency is that fertility is not decreased by it, but reproduction is impossible, for the mothers

Correction! In figure 2 the words "8 years a live" (See N<sup>o</sup>. 3591) must be "8 young".



cannot feed their young, owing to lack of milk secretion. Other rats, on the same diet but with enough Na, nursed their young normally. In one case we gave a quantity of 0.08 cc NaCl solution 37 % from the day of mating. Increase of weight now amounted to 51 gr. but the young were devoured by others. Loss of weight by parturition now amounted to 28 gr. Attempts to promote milk secretion by adding sufficient Na to the diet directly after parturition did not succeed.

## BIBLIOGRAPHY

1. BLANCHETIÈRE. Bull. soc. chim. **33**, 807, 1923.
2. BUNGE. Ztschr. f. Biol. **9**, 104, 1873.
3. HOFMEISTER. Landw. Versuchstationen, **16**, 383, 1873.
4. JOHN. Journ. of Biol. Chem. **77**, 27, 1928.
5. KAHANE. Bull. soc. chim. **47—48**, 382, 1930.
6. v. KAMPEN & WESTENBERG. Versl. v. Landbouwk. Onderz. No. 38, E, 1932.
7. KELLNER. Die Ern. d. Landw. Nutztiere, 8th. edition 1919, pg. 176. etc.
8. MILLER. J. of Biol. Chem. **55**, 45, 1923.
9. MILLER. J. of Biol. Chem. **55**, 61, 1923.
10. MILLER. J. of Biol. Chem. **70**, 759, 1926.
11. MITCHELL & CARMAN. J. of Biol. Chem. **68**, 165, 1926.
12. OLSON & JOHN. J. of Agr. Research. **31**, 365, 1925.
13. OSBORNE & MENDÉL. J. of Biol. Chem. **34**, 131, 1918.
14. RICHARDS, GODDEN & HUSBAND. Bioch. Journ. **21**, 971, 1927.
15. SASAKI. Ref. Chem. Abstracts. **19**, 1846, 1925.
16. SJOLLEMA. Tijdschrift v. Diergeneesk. **59**, 67, 1932.
17. TERROINE & REICHERT. Acad. des Sciences. 1930.
18. WEISKE. Journal für Landw. **22**, 390. 1874.
19. WOLFF & EISENLOHR. Landw. Jahrb. **22**, 605, 1893.
20. WOLFF & KREUZHAGE. Landw. Jahrb. **24**, 207, 1895.

---

**Anatomy.** — *The electric organ and its centres in Gymnotus electricus.*  
By C. J. KAMP and C. STUART. (Communicated by Prof. C. U.  
ARIËNS KAPPERS.)

(Communicated at the meeting of March 24, 1934.)

The electric organ of *Gymnotus* takes up a strikingly large part of the body, viz. about  $\frac{4}{5}$  of the total length. It extends from above the anal fin to the tip of the tail. Upon closer examination two organs may be distinguished, one above the other, a large and a small organ, separated by a layer which HUNTER considered to be fat. DELLE CHIAIE took it for a secretory organ, VALENTIN and SACHS regarded it as muscle. Microscopically this layer appears to consist of cross-striated muscle and much fat.

The large organ extends laterally to the skin, the small one is separated

from the skin by the superficial musculature of the radialia. Either organ consists of longitudinal walls, running practically horizontally, between which plates are situated, arranged one behind the other and separated by transverse walls. (fig. 1). The row of plates between two longitudinal walls forms a column. The number of plates and columns does not increase during the life of the animal, but they grow by intussusception, as was stated by DELLE CHIAIE and BABUCHIN.

Macroscopically it appears that together with the intermediate layer of muscles, which, however, is distinctly separated from it, the large organ is covered by an exceedingly strong fascia, which is not elastic and contains the blood-vessels and the nerves. This fascia is very closely connected with the skin without any intermediate fat or loose tissue. Its collagenic fibres run in three mutually perpendicular directions, from the upper hind end and perpendicular to the skin. Between the large organ and the intermediate layer of muscles a thin adipose tissue is situated and likewise under the layer of muscles, between this and the fascia.

The small organ is completely surrounded by muscles and lacks the above-mentioned fascia. The small organs of either side are separated in the midline by the radialia with their musculature. The muscles run in distinctly separated bundles from the lower hind to the upper front end. The septa between these bundles are attached to the thin fascia that encloses the small organ. The right and left large organ are only separated in the lower part by a thin septum. In the upper part, the intestine and the musculature of the trunk have been shoved in between.

The large organ begins about 5 cm behind the foremost fin, tapering off in forward direction into the fat. Practically at the same level, a little farther backwards the small organ begins in its pointed form in the adipose tissue.

The height of the large organ decreases backwards, that of the small one on the other hand increases in this direction. The greater part of the large organ has a milkwhite colour. On cross-section, however, part of it strikes by its glassy appearance, which, on longitudinal section, appears to be due to a different structure, the columns being lower and shorter there and the compartments (distance between two transverse walls) wider than in the remaining part of the organ.

The longitudinal walls adhere to each other in transverse and in longitudinal direction. That is why the columns begin and end in the shape of a wedge and, of course, the height of the compartments in one column is not the same everywhere.

The first to describe the glassy part of the organ was SACHS. He looks upon it as a separate third ('new') organ (fig. 1) beginning in a pointed shape, freely projecting into the adipose tissue. This is, however, incorrect. His 'new' organ begins about half-way the large organ, pointed but with the lower part adhering to the above-mentioned organ. The boundary between these two parts of the large organ is for the rest not clearly

defined, since the adjacent columns of the large organ already have somewhat wider compartments; less distinct is the decreasing height of the

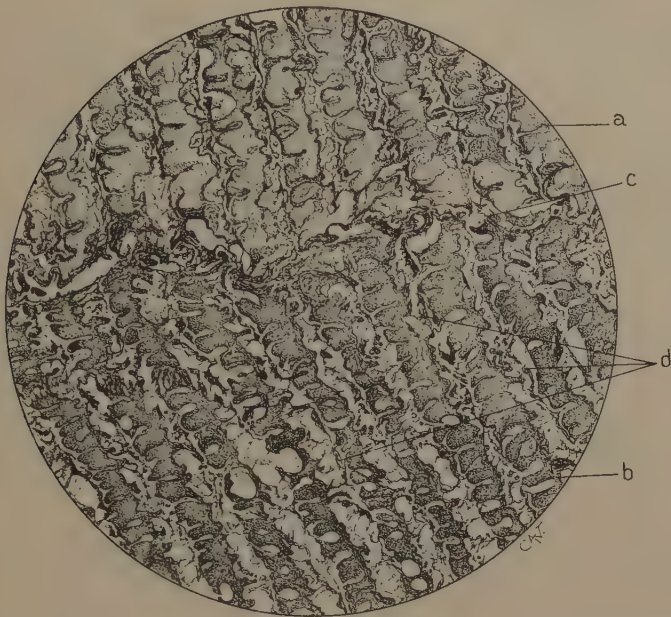


Fig. 1. Longitudinal section of the electric organ of *Gymnotus electricus*.  
*a* = Sachs' bundle of columns; *b* = large organ; *c* = longitudinal septum;  
*d* = transverse septa.

columns. Only at the beginning of the new organ the boundary is indicated by a somewhat thicker wall of connective tissue, changing farther backwards, however, into an ordinary longitudinal wall, so that then the boundary becomes indistinct. On cross-section the 'new' organ appears to be situated in the concavity in which the muscles of the trunk rest and not, as it has usually been described, in the upper tip of the large organ.

The 'new' organ becomes gradually larger towards the posterior part; only at the tail it increases more quickly in size and takes up nearly the whole of the large organ, which has been reduced there already by the enlargement of the small organ. At the same time the intermediate layer of muscles begins to move in lateral direction and comes to be situated between the large organ and the musculature of the radialia, so that finally the boundary between the large and small organ disappears.

Objections to the conception: 'new organ' are:

It has no fixed anatomical boundary. Neither has it separate blood-vessels and nerves. The transition is frequently indistinct and the compartments become gradually wider. Fusion of the longitudinal walls also occurs in the anterior part of the large organ and in the posterior part of the small one. In the third hind part the small organ has the character



of the new organ: the width of the compartments is 0.5 mm. or even more, just as at the beginning of the new organ. Besides the new organ is variable. It is, therefore, better to speak of SACHS' *bundle of columns*.

BALLOWITZ regards the wide compartments as primitive, because the pseudo-electric organs of *Raja* possess wide compartments as well.

### *Microscopically.*

On cross-section it appears that the plates run at an angle of  $70^\circ$  with respect to the skin; at the same time we see that they are not fixed perpendicularly to the longitudinal walls. That this is not due to an inclination of the plates, appears from the fact that one often observes the plate being fixed in two places to the same longitudinal wall. This points to a bend in the plate, which probably should be looked upon as an abnormal product, since it occurs very irregularly.

The bloodvessels and nerves in the longitudinal walls are cut transversely in sagittal sections. In cross-section they are cut longitudinally, which consequently points to a mediolateral course. The longitudinal walls consist of collagene tissue, the transverse walls, containing bloodvessels and nerves, consist of compressed intermediate tissue. The plates are separated from the transverse walls by an anterior fissure and a somewhat wider posterior fissure. (fig. 3). Either fissure is filled up by *intermediate tissue* consisting of: 1. Large star-shaped cells with finely ramified offshoots, which on the one side mutually form a network and on the other side lie against the plate (figs. 2, 3). 2. Smaller cells situated in the network, more resembling ordinary connective tissue cells (figs. 2, 3). 3. A great number of dark-coloured grains, the meaning of which is unknown. (figs. 2, 3). The intermediate tissue of SACHS' bundle of columns seems to contain more nuclei than that of the remaining large organ. The plate itself is covered by a strongly refractive membrane, the electrolemm (figs. 2, 3). In this plate we distinguish: 1. An anterior part, completely covered by broad, blunt, practically equally large papillae, containing nuclei surrounded by a lighter area; frequently also secondary papillae (fig. 2). 2. An intermediate part without nuclei. 3. A posterior part containing two kinds of papillae: a) papillae resembling those in front, but smaller and less numerous. b) the so called spine-papillae: long, narrow papillae, frequently curved and extending to the posterior wall. SACHS regarded them as supporting, BILHARZ as nerve papillae (fig. 3). This whole part shows many nuclei and round these nuclei there is a light area (fig. 3). No bloodvessels penetrate into the plate. The tissue is homogeneous, containing a fine network with numerous grains (fig. 3). The more intensive colour in front may probably be explained by a greater density of the network (fig. 2). Further backward this difference in colour is not nearly so great. There, however, BOLL's striation (fig. 3) is clearly perceptible, emerging from the electrolemm as thin rods, which end freely inside, frequently in a small knob.



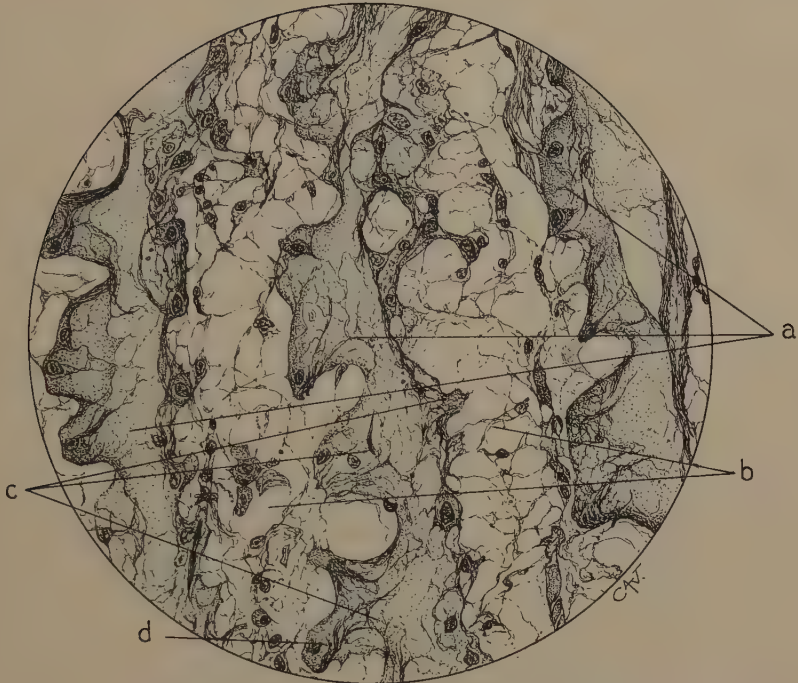


Fig. 2. Longitudinal section of the electric plates of *Gymnotus electricus*.  
*a* = plates; *b* = intermediate tissue; *c* = papillae; *d* = secondary papilla.



Fig. 3. Longitudinal section of the electric plates of *Gymnotus electricus*.  
*a* = posterior fissure; *b* = anterior fissure; *c* = spine-papillae; *d* = Boll's striation; *e* = nuclei with light area; *f* = Pacinian line.

*Derivation of the electric organ.* In teleosts the myomeres, forming the musculature of the trunk, are divided by the linea lateralis into a

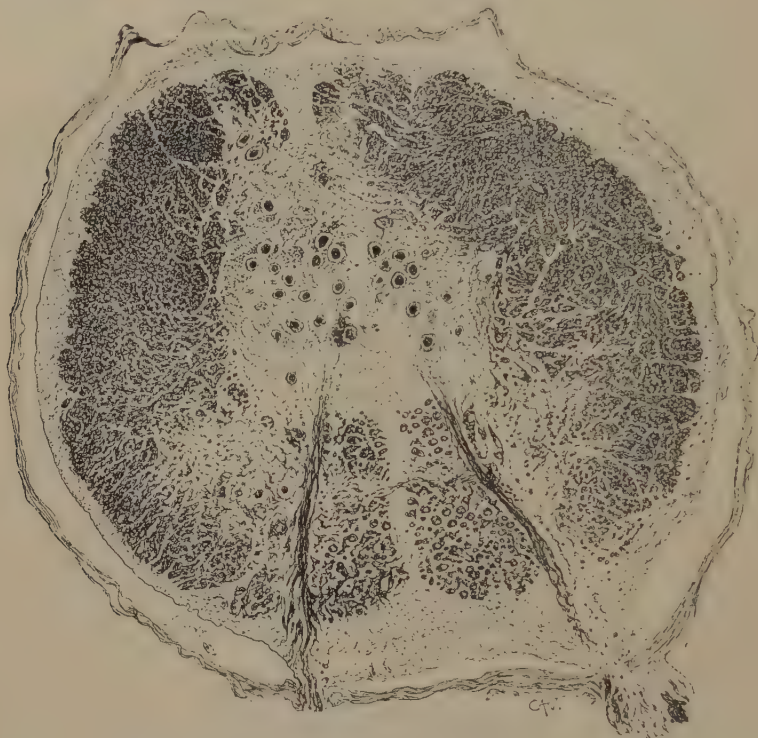


Fig. 4. Transverse section of the spinal cord of *Gymnotus electricus* behind the 14th segment.

musculus superior and a musculus inferior. The ligamenta intermuscularia run zigzag with respect to the linea lateralis; the muscle bundles themselves are cone shaped with the apex turned to the front. One can always distinguish a dorsal part or the musc. superior and a ventral part or musc. inferior, separated by a curve in the ligamentum intermusculare. The muscle bundles form half cones with the apex turned backwards. A similar arrangement is found in *Gymnotus electricus*, only everything has been shifted in a dorsal direction.

*Silurus glanis*, resembling *Gymnotus* in some respects, has, in addition to the abovementioned lateral musculature a separate bundle of muscles, the *M. lateralis imus* (FRITSCH), splitting off from the ventral muscles. The *m. lateralis imus* runs ventral to the musc. ventralis and extends between this muscle and the musculature of the radialis from closely behind the shoulder-girdle to the tail.

This muscle is also found in *Sternopygus*. In *Anguilla* hardly a vestige is to be seen. In *Gymnotus electricus* it is also wanting, but in its place the electric organ occurs. The intermediate layer of muscles between the large and small organ is a remnant of it. The longitudinal walls of the

large organ communicate with the aponeuroses of the intermediate layer of muscles. These aponeuroses may shift secondarily. Between the large organ and the intermediate layer of muscles some loose fibrillar connective tissue is situated.

Evidently the small organ may be derived from the deep musculature of the radialia. For, when the small organ grows larger, this muscle disappears. At the upper side it is altogether wanting. Below, where the columns of the small organ are narrower, the muscles grow broader again. The exterior ventral musculature of the radialia spreads round the large organ and covers a number of the lower columns. In the posterior fifth part the intermediate layer of muscles is situated more laterally and penetrates between the large organ and the musculature of the radialia.

*Result.* The deepest part of the *m. lateralis imus* changes into the intermediate layer of muscles, the upper interior part is transformed into the *large organ*.

The small organ originates from the deep musculature of the radialia.

#### *Microscopically.*

The longitudinal walls are the ligamenta intermuscularia. The electrolemm may be compared with the sarcolemm.

According to investigations by FRITSCH and BABUCCIN the frontocaudal proportions of the plate correspond to the muscular part between two membranes of KRAUSE. With this conclusion we do not agree. As will be shown in a following paper, dealing with the electric organ of Raja, it is much more probable that one electric plate corresponds to one muscle fibre, that, shortening in caudo-frontal direction, has extended in the two other dimensions. In other words the electric plate does not represent an amalgamated bundle of muscle fibres but just one fibre. So it is not necessary to suppose a regressive metamorphosis of muscular substance into intermediate connective tissue, as FRITSCH and BABUCHIN do.

BABUCHIN examined the homology of the electric plate and striated muscle in Torpedo and Raja. According to him the compartments of Torpedo would be equal to these of Gymnotus. However, the objection can be made that in Gymnotus anisotropy is wanting, while in Torpedo a remnant of it may still be found. This should probably not be regarded as a loss of the anisotropic substance, but as a loss of double-fraction by the change of embryonic muscular tissue into an electric plate, owing to different conditions in tension and influence of swelling, the more so as, according to FRITSCH, the electric element is not completely isotropic, as SACHS and others thought. Particularly in the intermediate part anisotropy may frequently be seen under favourable circumstances. The less far the change from embryonic muscular tissue into electric plate has proceeded, the more conspicuous is the anisotropy. Hence there is double fraction in the incompletely developed papillae of SACHS' bundle of columns,



which moreover contains an axial cross-striated layer, but not in the typically developed papillae.

BOLL's striation — considered by FRITSCH as a coagulation phenomenon of a permeable membrane — is certainly not a nerve-ending, as BOLL himself thought. Its exact interpretation is as yet obscure.

### *Innervation.*

The electric organ is innervated by *nervi intercostales* (HUNTER), which branch out dichotomously and pass through the posterior fissure to the plate. They form a fine twisted tissue against the papillae, their terminal baskets communicating throughout the whole organ. The whole plate is thus stimulated simultaneously (ROSENBERG).

Some root cells of these nerves are observed already at about the level of the 10<sup>th</sup> vertebra, in a glious substance that tends to flow together behind the central canal. This substance (fig. 4), situated at the foot of the posterior horn occurs also in other Teleosts. Cranial to the 10<sup>th</sup> vertebra in this substance some multipolar ganglion-cells are seen, which in downward direction become more rounded and resemble the typical electric cells. Some axis-cylinders of these cells seem to bend backwards round the central canal to the other side, suggesting a crossed as well as homolateral innervation.

The typical electric cell-column, however, does not begin until the 12<sup>th</sup>—23<sup>rd</sup> vertebra (individually different). The bodies of the electric cells are round and finely granulated. They contain a large nucleus with nucleoli and have many offshoots which are partly ramified. First some cells are seen lying bilaterally in the glious substance, further down they lie in the inner motor cell group.

Still farther down they enclose the central canal dorsally and thus form a ring of cells which ventrally remains open. As the glious substance has already disappeared several sections above the beginning of the electric column there evidently is no connection between this substance and the electric cells. The axis-cylinders of the electric cells emerge with the anterior roots and cannot be distinguished from the latter. By means of lateral dendrites the cells may communicate with the lateral funiculi and by medial dendrites in the commissura grisea with the other side. A direct reflex action of these cells via the posterior roots is known for certain. Voluntary discharge, however, is also possible; so there must exist a connection with higher centra. Perhaps they receive impulses from higher centra via the lateral funiculi. At the caudal end of the spinal cord the number of electric cells decreases. Here again they are lying bilaterally only and resemble ordinary motor cells.

### LITERATURE.

- BABUCHIN. Über die sogenannten Dompapillen im elektrischen Organ des Zitteraales (*Gymnotus electricus*). Anat. Anzeiger Bnd. XIII, 1897, N<sup>o</sup>. 23.



- BABUCHIN. Zur Anatomie des Zitteraales (*Gymnotus electricus*) mit besonderer Berücksichtigung seiner elektrischen Organe. Archiv für mikrosk. Anatomie. Bd. L, 1897, p. 686. See also Arch. für Anatomie und Physiologie 1897.
- FRITSCH. Das Gehirn und Rückenmark des *Gymnotus electricus*. Vergleich. anatomische Betrachtung der elektrischen Organe von *Gymnotus electricus*. Als Anhang I und II in: Dr. CARL SACHS' Untersuchungen am Zitteraal. *Gymn. electricus*. Nach seinem Tode bearbeitet von DU BOIS REYMOND, Leipzig, 1881.
- ROSENBERG. Die elektrischen Organe. Handb. d. norm. und pathol. Physiologie, Bnd VII, Teil 2, Berlin, 1928.
- SACHS. Beobachtungen und Versuche am Südamerikanischen Zitteraal. In Briefen an DU BOIS REYMOND mit einer Vorbemerkung des Letzteren. Arch. für Anatomie und Physiologie. Physiolog. Abt. 1877, p. 66.
- SCHULTZE. Über die elektrischen Organe der Fische. Archiv für Anatomie, Physiologie und wissenschaft. Medizin Jahrg. 1862, p. 470.
- VALENTIN. Beiträge zur Anatomie des Zitteraals (*Gymnotus electricus*). Neue Denkschriften der Alg. Schweizerischen Gesellsch. für die gesammten Naturwissensch. Bd. VI, Neuchatel, 1842, p. 37.

---

**Psychology.** — *Die Lokalisation von Vibrationsempfindungen bei zunehmendem Druck.* Von Dr. J. C. L. GODEFROY. (Aus dem Psychologischen Laboratorium der Universität zu Amsterdam.) (Communicated by Prof. B. BROUWER.)

(Communicated at the meeting of March 24, 1934.)

In den letzten Jahren haben zahlreiche neurologische und psychologische Untersuchungen über den Vibrationssinn und die vibratorischen Zustände eine Reihe bisher unbekannter Tatbestände aufgedeckt; es sind hier die Veröffentlichungen von C. FRANK, GUTZMANN, SERGI, HEAD, in erster Linie aber die von M. v. FREY und D. KATZ zu nennen. U.a. zeigt sich beim Studium der Vibrationsempfindungen sehr bald eine Erscheinung, die bereits von mehreren Forschern beobachtet und in verschiedener Weise beschrieben wurde; man kann sie charakterisieren als „Veränderlichkeit der Lokalisation der Vibrationsempfindung“. Es handelt sich um Folgendes: berührt man mit einer oder mehreren Fingerkuppen einen kräftig vibrierenden festen Gegenstand, so spürt man die Vibration zunächst in der Haut an der Berührungsstelle selbst, dann aber auch in den Gewebezellen des Fingers um die Berührungsstelle herum, ja manchmal sogar in der Hand, im Puls, in den anderen Fingern. Gelegentlich scheint die Vibration an der Berührungsstelle selbst zu verschwinden, um an anderen Teilen des Armes stärker hervorzutreten. Diese Lokalisationsänderung scheint abzuhängen von der Beugung, der Muskelspannung, der Haltung der betr. Körperteile und hauptsächlich von dem Druck, mit dem die Finger auf den vibrierenden Gegenstand drücken. Dieser Faktor ist in den bis-

herigen Publikationen nicht genügend beachtet, noch viel weniger exakt untersucht worden. Der Zweck dieser Arbeit ist nun, diese Erscheinung genauer zu prüfen, da eine darauf hin gerichtete Untersuchung einen tieferen Einblick in die Natur der Vibrationsempfindung gestatten dürfte.

Es wurde ein einfacher, doch für unsere Zwecke hinreichend exakter Vibrationsapparat konstruiert; er besteht aus einem flachen eisernen Stab (250 mm lang, 2 mm dick und 10 mm breit), der an einem Ende festgeklemmt und durch eine Bobine mit Unterbrecher in Vibration versetzt wird. Die Anzahl der Vibrationen beträgt 25 pro sec. Schaltet man diesen Apparat an einen Wechselstromtransformator, dann kann man die Anzahl der Vibrationen, auch durch Verkürzung des Stabes, auf 100 p. sec. bringen. Der Apparat ist auf einem grossen Sperrholzbrett ( $125 \times 40 \times 1$  cm) montiert. Dieses gerät in Vibration, und man kann allerlei Gegenstände darauf setzen, die dann ebenfalls in Vibration geraten. Isolierung mit Hilfe von Kautschukfüssen verhindert, dass Vibrationen durch den Fussboden die Vpn. erreichen. Auf das Brett ist eine Druckwage gestellt, die mit in Vibration gerät. Dadurch, dass man mit einem oder mehreren Fingern auf die Druckwage drückt, wird ein kleiner Hebel bewegt. An diesem ist ein Zeiger befestigt, dessen Bewegungen durch ein Punktal-Glühlämpchen auf eine Wand mit einer Skala projiziert werden. Wird der Zeiger durch Drücken auf die Wage in einer bestimmten Höhe gehalten, dann kann man hinterher durch Gewichte feststellen, welchen Druck man ausgeübt hat. Ebenso kann die Vp. während des Versuchs wahrnehmen, ob sie den Fingerdruck konstant auf einem bestimmten Gewichtsdruck hält.

Die Versuche wurden mit den drei mittleren Fingern der linken Hand durchgeführt. Der 3. Finger wurde stets zuerst benutzt, weil er als längster am leichtesten von den anderen Fingern zu isolieren ist; ausserdem lässt sich so die Fortpflanzung der Vibrationsempfindung am besten studieren, und endlich kann man (nach den Aussagen der Vpn.) mit diesem Finger am leichtesten den Druck konstant halten. Die Vp. hatte mit jedem Finger gesondert auf die vibrierende Wage zu drücken, zunächst mit einem Druckgewicht von 0 g, also mit einer eben merkbaren Berührung, die die Druckwage nicht in Bewegung bringt (auch wohl Effleurage-Druck genannt), danach mit 100, 200, 300, 400, 500, 600, 800, 900, 1000 und 1200 g Druck. Die Vpn., alle mehr oder weniger geübt in derartigen Beobachtungen, waren: Prof. R., Frau M., Frl. Dr. M. B., Frl. Dr. DE B. O., Frl. B., Herr H., Dr. J. G., Frau G. v. V. Sie wurden gebeten, ihre Vibrationsempfindungen so genau wie möglich zu beschreiben und hauptsächlich auf jene Stellen an den Fingern, an der Hand und am Arm zu achten, an denen diese auftreten. Die Angaben der Vpn. über die Stelle, wo die Vibration empfunden wurde, sowie über ihre Stärke wurden dargestellt in einer schematischen Figur der Felder in Fingern, Hand und Arm. Wie also die Vpn. die Versuchsergebnisse visuell vorstellten, ergibt sich aus den Schemata 3—5.

Es folgen die Protokolle der Beobachtungen zweier Vpn.

1. *Beobachtungen von Dr. de B. O. (Vergleiche Schema 1.)*

*0 g Druck.*

Kuppe des 3. Fingers auf Druckwage: Ich empfinde die Vibration am stärksten in der Haut an der Berührungsstelle. Es ist ein bisschen Vibration in den Kuppen des 2. und 4. Fingers. Sie pflanzt sich fort nach der Fingerwurzel (Metacarpo-Phalangealgelenke), aber ich habe das Gefühl, dass sie sich stets verändert.

4. Finger: Es ist, als ob der Finger durch Vibration nach oben gedrückt wird. An der Berührungsstelle empfinde ich die Vibration am stärksten, aber rings herum auch etwas.

2. Finger. Ich empfinde an der Berührungsstelle Vibration, doch nicht so stark wie bei den beiden anderen Fingern. Sie pflanzt sich fort nach der Verbindung zwischen dem 2. und 3. Finger. Ab und zu kommt sie auch in die Verbindungen der anderen Finger; manchmal wird sie hier etwas stärker als an der Berührungsstelle. Die Vibration ist hauptsächlich oberflächlich.

*100 g Druck.*

3. Finger: Die Vibration ist weniger diffus; stark ausgesprochen an der Berührungsstelle, aber auch deutlich an allen Seiten rings herum, in der Tiefe, oben und daneben. Der Gegenstand ist frei von Vibration, mit anderen Worten: der Gegenstand vibriert nicht, sondern die Vibration kommt sozusagen aus ihm heraus. Nun plötzlich spüre ich, dass an der Berührungsstelle selbst keine deutliche Vibration ist, doch spüre ich sie an allen Seiten rings herum. Die Vibration kommt also nicht aus dem Gegenstande, der also eigentlich stillsteht. Die Vibration wird allmählich schwächer.

4. Finger: Beinahe ganz wie bei dem 3. Finger. Den Gegenstand spüre ich fast nicht, nur Vibration. Die Vibration pflanzt sich nach allen Richtungen hin fort. An der Berührungsstelle spüre ich auch ein wenig Vibration. Ich spüre fast keine Berührungsstelle...

2. Finger: Es besteht eine starke Fortpflanzung der Vibration nach der Fingerwurzel hin. Die Vibration ist nicht überall in den Fingern zu spüren. An der Berührungsstelle ist keine Vibration zu spüren.

*200 g Druck.*

3. Finger: Ich spüre ein bisschen in der Handfläche und in dem Finger, ganz leicht. Auch unter dem Nagel. An der Berührungsstelle spüre ich überhaupt nichts. Die Vibration geht durch alle Glieder des 3. Fingers nach oben. Keine Vibration in den anderen Fingern. Ich spüre einen festen Vibrationsknoten unter der Berührungsstelle. Dieser breitet sich stark aus, durch alle Fingerwurzeln hin, besonders nach der Wurzel des 2. Fingers....

4. Finger: Die Vibration fällt am stärksten auf in der Klein-Finger-Maus. Dann in dem 2. Fingerglied und um die Berührungsstelle herum. Keine Vibration in der Handfläche. In der Haut zwischen 4. und 5. Finger ist die Vibration ziemlich stark. Ich spüre sie nicht in der Handfläche; es ist, als ob sie dies Gebiet überspringt. Nun kommt sie auch in die Haut zwischen 3. und 4. Finger und zieht von dem 2. Finger nach dem Daumen. Am stärksten spüre ich sie an allen Seiten und in der Haut um die Berührungsstelle. Nicht so stark unter dem Nagelbett. Es hängt von der Lage meiner Hand ab, ob ich die Vibration in dem Daumen spüre. Beuge ich etwas nach innen, dann spüre ich keine Vibration mehr.

*300 g Druck.*

3. Finger: Ich spüre die Vibration stark in der Klein-Finger-Maus, aber nicht im Handteller. Es ist keine Vibration an der Berührungsstelle; diese ist gleichsam eins mit dem vibrierenden Gegenstand. An allen Seiten um die Berührungsstelle herum und auch in der Haut ist wohl Vibration... In der Klein-Finger-Maus spüre ich sie stark, wenn ich daran denke...

*400 g Druck.*

3. Finger: Ich spüre sie stark in dem Endglied des 3. Fingers um die Berührungstelle.

Ferner durch den ganzen Finger hin, und wenig Fortpflanzung nach oben; das ist beinahe immer so beim 3. Finger.

4. Finger: Wenig Vibration in dem 4. Finger und nichts an der Berührungsstelle, aber stärker in der Klein-Finger-Maus, und auch in dem kleinen Finger selbst, aber weniger.

Ich spüre viel und stark im Handteller und in allen Fingerwurzeln, stark im 2. und 4. Finger, im Puls, und mässig im Unterarm....

600 g Druck.

3. Finger: Ich spüre sie stark um die Berührungsstelle hin. Sie pflanzt sich nach oben fort, vage durch die ganze Hand. Zuerst würde man sagen, es sei keine Vibration da. Sie zieht durch den Puls nach dem Unterarm und manchmal spüre ich sie im Ellenbogen.

4. Finger: Sie zieht durch die ganze Hand und den Arm, auch dorsal bis zum Ellenbogen. Stärker spüre ich sie in den Fingerwurzeln, und mehr noch in der Fingerwurzel von 2.—3. Finger. In dem 4. Finger selbst spüre ich fast nichts, ausser etwas um die Berührungsstelle herum...

2. Finger: Ich spüre Vibration etwa in derselben Gegend wie bei ungefähr 400 g Druck. Sie ist sehr stark um den Rand der Berührungsstelle herum. Ausserdem spüre ich nicht viel. Je stärker man drückt, um so weniger spürt man(!).... Im Anfang spürte ich mehr als jetzt; nun werde ich etwas steif und müde.

800 g Druck.

3. Finger: Um die Berührungsstelle herum spüre ich etwas; ein wenig durch die

Schema 1. Lokalisation der Vibrationsempfindungen bei zunehmendem Druck nach den Aussagen von Vp. Dr. de B. O.

Gereizt: 3. Finger. — Grossbuchstaben bedeuten stärkere, Kleinbuchstaben schwächere Vibrationsempfindungen; Aa = Vibrationsempfindungen bei 0 g Druck, Bb bei 100 g, Cc bei 300 g, Dd bei 600 g.

| g. Druck           |  | 5. Finger.                  |     |     |     | 4. Finger.        |     |     |     | 3. Finger<br>(gereizt) |     |               |     | 2. Finger. |     |     |     | Daumen. |     |     |     |
|--------------------|--|-----------------------------|-----|-----|-----|-------------------|-----|-----|-----|------------------------|-----|---------------|-----|------------|-----|-----|-----|---------|-----|-----|-----|
|                    |  | 0                           | 100 | 300 | 600 | 0                 | 100 | 300 | 600 | 0                      | 100 | 300           | 600 | 0          | 100 | 300 | 600 | 0       | 100 | 300 | 600 |
| Endglied           |  |                             |     |     |     | A                 |     |     |     | A                      | B   | <sup>1)</sup> |     | a          |     | C   |     |         |     |     |     |
| Mittleres<br>Glied |  |                             |     |     |     | a                 |     |     |     | a                      | b   | C             | D   |            |     |     |     |         |     |     |     |
| Erstes<br>Glied    |  |                             |     |     |     |                   |     |     |     |                        | b   | c             | D   |            |     |     |     |         |     |     |     |
|                    |  | regio meta-<br>carpophalang |     |     |     | c                 |     |     |     | C D                    |     |               |     | c          |     |     |     |         |     |     |     |
|                    |  | C                           |     |     |     | palma manus       |     |     |     | c D                    |     |               |     |            |     |     |     |         |     |     |     |
|                    |  | hypothenar                  |     |     |     | regio inter then. |     |     |     | d                      |     |               |     |            |     |     |     | thenar  |     |     |     |
|                    |  |                             |     |     |     | Puls              |     |     |     | D                      |     |               |     |            |     |     |     |         |     |     |     |
|                    |  |                             |     |     |     | Unterarm          |     |     |     | D                      |     |               |     |            |     |     |     |         |     |     |     |
|                    |  |                             |     |     |     | Ellenbogen        |     |     |     | D                      |     |               |     |            |     |     |     |         |     |     |     |
|                    |  |                             |     |     |     | Oberarm           |     |     |     |                        |     |               |     |            |     |     |     |         |     |     |     |

Berührungsstelle. <sup>2)</sup> Umgebung der Berührungsstelle.



ganze Hand. Sonst spüre ich nichts. Es ist eine dumpfe Vibrationsempfindung durch die ganze Hand.

4. Finger: Es entsteht rasch eine dumpfe und steife Empfindung.

2. Finger: Nun ist es weniger dumpf, denn ich musz weniger stark drücken. Starke Vibration im 2. Finger. Es ist sehr diffus und nicht so besonders flach um die Berührungsstelle herum. Zuerst auch stark im Daumen, später nicht mehr so. ....

#### *1200 g Druck.*

3. Finger: Es ist noch ein bisschen Vibration um die Berührungsstelle. Sie verschwindet sehr schnell und macht einer Druck- und Spannungsempfindung Platz. Ich werde steif und müde.

4. Finger: Vibration eben um den Rand der Berührungsstelle und ferner deutlich um den Ellenbogen.

#### *Beobachtungen von Prof. R. (Vergl. Schema 2.)*

##### *0 g Druck.*

3. Finger: Deutlich scharfe Vibration, hauptsächlich lokalisiert an der Berührungsstelle. Sie nimmt das ganze Fingerglied ein, geht aber nicht nach oben.

PS. Nicht als „Vibration“, sondern als „Erregung“ empfunden. Dauert ein paar Sekunden. Qualitativ ist die Nachwirkung verschieden von Vibration. Es ist, wenn auch in sehr geringem Masze, so, als ob der Finger Frost gehabt hat, oder es ist eine Empfindung, als ob er eingeschlafen ist. Es bleibt zuerst dasselbe, später wird es „wellenförmig“.

2. Finger: Vibration wird lediglich an der Berührungsstelle gespürt, bei sehr geringem Druck auch in der Fingerkuppe mit. Sie ist deutlicher als bei dem 3. Finger, vor allem bei geringem Druckunterschied. Bei sehr leichter berührung verschwindet die Stosz-Empfindung und geht über in eine feinkörnige Empfindung, wodurch es den Anschein bekommt, als ob die Vibration viel schneller ist, mit leichten Schwebungen darin. Bei geringem Druck bleibt es feinkörnig, doch als Hintergrund kommen Wellen hinzu; hieraus kommen die Vibrationen zum Vorschein — eigentlich ist es umgekehrt!! Körnig ist der Hintergrund.

4. Finger: Hierbei empfinde ich etwas Ähnliches, dem nicht so leicht technisch nachzugehen ist, aber das Vibrationsbild ist nicht so klar. Die Empfindung ist mehr unangenehm.

Was den Gefühlston angeht, so ist er beim 2. Finger positiv, beim 3. zweifelhaft, beim 4. bestimmt negativ.

##### *100 g Druck.*

3. Finger: Stoszartige Vibrationen auf einem breiteren dumpferen wellenförmigen Hintergrund. Hieraus kommen die Stöße (Stöszchen). Auch räumlich ist die Vibrationsfläche breiter. Das ganze erste Fingerglied tüt mit. Oft auch das zweite.

2. Finger: Die Vibration geht durch bis zum 3. Fingerglied, etwas konstanter. Die Vibration ist auch stoszartig und gröber. Beim 3. Finger waren die Vibrationen feiner und die Stöße deutlicher. Nein, nun werden sie beim 2. Finger deutlicher.

4. Finger: Der Finger vibriert bis zur Hälfte des 3. Fingergliedes. Der kleine Finger tut manchmal auch mit. Die Vibration ist gleichmässiger, die Stöße sind nicht so deutlich. Beim 3. Finger taten der 2. und 4. schwach mit.

Beim 2. Finger spüre ich, wie der Daumen und der 3. Finger mittun.

Beim 3. Finger tut der 2. mehr mit; beim 2. auch der Daumen (mehr).

PS. Nun bekomme ich eine kitzelartige Empfindung im Handteller.

##### *200 g Druck.*

3. Finger: Die Vibration ist nicht so deutlich in der Fingerkuppe und der Berührungsstelle. Ich spüre die Vibration mehr von innen. Ist sehr verschieden, nicht gleichmässig. Manchmal empfinde ich sie, als ob sie unter dem Handteller in der Luft ist. Auf jeden

Fall ist sie in der Gegend des Handtellers. Sie ist noch stoszartig in dem ersten Fingerglied, an der Berührungsstelle und in dem Handteller. Hier ist sie zusammenhängend feinkörnig.

2. Finger: Deutliche Stoszvibration im ganzen Finger. Sie geht nicht allein in den Handteller, sondern auch in den Handrücken. Auch an der Berührungsstelle Stösze. Nach oben zu wird die Vibration fein zusammenhängend, nicht wellenförmig.

4. Finger: Nicht so deutlich an der Berührungsstelle. Ab und zu stärker und ganz gleichmäßig im Handteller, besonders in der Klein-Finger-Maus, und es hat den Anschein, als ob dies die Berührungsfläche sei. Hier ist die Vibration auch mehr wellenförmig.

#### *400 g Druck.*

3. Finger: Deutliches Stoszen. Vor allem an der Berührungsstelle, doch geht es nicht tief und strahlt nicht so aus. Manchmal empfinde ich Vibration in dem 2. und 3. Finger. Alle 3 Glieder des 3. Fingers vibrieren; in dem Handteller ist die Vibration undeutlich.

2. Finger: Die Ausstrahlung ist nicht so deutlich. Der ganze Finger erscheint als Vibrationsquelle. Strahlt undeutlich aus. Nicht deutlich im Handteller. Manchmal fühle ich den 1. und 3. Finger mitvibrieren.

4. Finger: Im ganzen Finger spüre ich eine glatte Vibration. Allein die Berührungsstelle weist eine stoszende Vibration auf. Die anderen Finger fühle ich nicht vibrieren.

#### *600 g Druck.*

3. Finger: Das stoszende Vibrieren spüre ich noch, aber nicht so deutlich. Das Vibrieren spüre ich stark im 3. Finger, noch stärker in der Handfläche, in den Fingerwurzeln und Daumen- sowie Klein-Finger-Maus. An der Berührungsstelle ist die Vibration bald stärker, bald schwächer als im Handteller. Sie hängt sehr von meiner Aufmerksamkeit ab. Die Qualität der Vibration ist sehr verschieden in Handteller und Finger. In der Handfläche ist es eine diffuse Vibration, in den Fingern ist es mehr stoszend. Der 2. und der 4. Finger tun etwas mit.

2. Finger: Der Finger vibriert wenig. Mehr vibriert die Daumen-Maus und der Handteller. Die Vibrationsarten sind wenig verschieden. Eine Unterscheidung zwischen den Arten durchzuführen ist schwierig.

4. Finger: Es ist wenig Vibration zu spüren. Wohl etwas in der Hypothenar. Die Vibrationsarten zu unterscheiden, was bei dem 3. Finger so leicht war, ist bei diesem Finger sehr schwierig.

Alle Muskeln sind schnell in tonische Spannung gekommen.

#### *900 g Druck.*

3. Finger: An dem Finger ist die Vibration nicht so stark zu spüren. Wohl stärker in der ganzen Hand, dem Puls und dem unteren Teil des Unterarms. Hauptsächlich an Puls und Daumen- sowie Klein-Finger-Maus ist die Vibration am deutlichsten. Der Vibrationsstosz ist viel geringer geworden; die Vibration wird gleichmäßiger.

2. Finger: Die Vibrationsstösze sind deutlicher in der Daumenmaus und im Handteller. An der Berührungsstelle spüre ich beinahe nichts mehr. Mehr Vibration spüre ich im Daumen und im 3. Finger.

Die Vibration ist am stärksten in Handteller und Thenar.

4. Finger: Die Vibration selbst ebenso wie die Ausstrahlung ist in dem Finger und dem untersten Teil der Hand nicht so stark und so deutlich. Die Vibration geht ferner deutlicher durch den Puls weiter nach oben; ich weisz nicht, wie weit.

PS. Eine deutliche Kitzelempfindung im Puls.

#### *1200 g Druck.*

3. Finger: Es ist eine stoszende Vibration in dem Finger, aber nicht an der Berührungsstelle. Die Vibrationsempfindung verschwindet oder kommt mehr zum Vorschein, je nachdem ich meine Aufmerksamkeit darauf richte. Es ist auch Vibration in dem 2. und

4. Finger. Die ganze Hand und der Unterarm vibrieren mit. Auch der Handrücken vibriert; das ist kein angenehmes Gefühl.

2. Finger: Ich empfinde eine scharfe Vibration in dem 2. Finger, die sich weit nach oben und auch nach der Rückseite hin fortpflanzt. An der Berührungsstelle empfinde ich nichts. Die Vibration pflanzt sich durch Puls und Unterarm fort bis in den Ellenbogen.

4. Finger: Es ist schwierig, mit diesem Finger längere Zeit 1200 g zu drücken. Durch die Spannung ist die Vibration im Ganzen nicht mehr deutlich. Ich glaube, dass sie sehr weit bis in den Ellenbogen geht. Es gibt wenig Schwebungen. Die Vibration ist dumpf und manchmal überhaupt nicht da. Zu Beginn empfinde ich die Vibration gerade eben, und dann weicht diese Empfindung der Druckempfindung.

*Vp. R. hat noch folgende Beobachtungen gemacht:*

Bei bloßer Berührung oder Effleurage und bei vollem Druck mit den Fingern auf das Brettchen sind die Vibrationsempfindungen sehr verschieden in ihrer Art. Bei 0 g Druck empfinde ich die Vibration qualitativ ganz anders als bei allen anderen Berührungen mit mehr oder weniger Druck aufs Brettchen.

Bei 0 g Druck bemerkte ich, dass die Vibrationsempfindung mit den „Schwebungen“ der Vibration übereinstimmt, auch wenn ich mit den 3 Fingern (Vp. berührt mit 2., 3. und 4. Finger zugleich das Vibrationsbrett) zugleich das Brett berühre. Bei dieser Berührung bemerke ich positive, deutlich abzählbare „Schwebungen“. Bei Druck werden sie aber schneller, sie beginnen einem Ton zu gleichen. Bei dem Daumen ist die Vibrationsempfindung am schärfsten, beim 2. Finger weniger scharf, beim 3. Finger am wenigsten scharf. Bei dem 4. Finger ist sie wieder schärfer, bei dem kleinen Finger wieder sehr scharf. Wenn ich mit den 5 Fingern zugleich auf das Vibrationsbrett drücke, dann

*Schema 2 Lokalisation der Vibrationsempfindungen bei zunehmendem Druck nach den Aussagen von Vp. Prof. R.*

Gereizt: 3. Finger. — Grossbuchstaben bedeuten stärkere, Kleinbuchstaben schwächere Vibrationsempfindungen; Aa = Vibrationsempfindungen bei 0 g Druck, Bb bei 100 g, Cc bei 200 g, Dd bei 900 g.

|          |                         | 5. Finger  |     |     |     | 4. Finger          |     |     |     | 3. Finger<br>(gereizt) |     |     |      | 2. Finger |     |     |     | Daumen |     |     |     |        |  |  |  |
|----------|-------------------------|------------|-----|-----|-----|--------------------|-----|-----|-----|------------------------|-----|-----|------|-----------|-----|-----|-----|--------|-----|-----|-----|--------|--|--|--|
|          |                         | 0          | 100 | 200 | 900 | 0                  | 100 | 200 | 900 | 0                      | 100 | 200 | 900  | 0         | 100 | 200 | 900 | 0      | 100 | 200 | 900 |        |  |  |  |
| g. Druck | Endglied                |            |     |     |     |                    |     |     |     | A                      | B   | c   | 1)   |           | B   |     |     |        |     |     |     |        |  |  |  |
|          | Mittleres Glied         |            |     |     |     |                    |     |     |     | a                      | B   | C   | d 2) |           | B   |     |     |        |     |     |     |        |  |  |  |
|          | Erstes Glied            |            |     |     |     |                    |     |     |     |                        | b   | C   | d    |           | b   |     |     |        |     |     |     |        |  |  |  |
|          |                         |            |     |     |     |                    |     |     |     |                        |     |     |      |           |     |     |     |        |     |     |     |        |  |  |  |
|          | regio meta-carpophalang |            |     |     |     |                    |     |     |     |                        |     |     |      |           |     |     |     |        |     |     |     |        |  |  |  |
|          |                         | D          |     |     |     | palma manus        |     |     |     | C D                    |     |     |      |           |     |     |     | D      |     |     |     |        |  |  |  |
|          |                         | hypothenar |     |     |     | regio inter thenar |     |     |     |                        |     |     |      |           |     |     |     |        |     |     |     | thenar |  |  |  |
|          |                         |            |     |     |     |                    |     |     |     |                        |     |     |      |           |     |     |     |        |     |     |     |        |  |  |  |
|          |                         | Puls       |     |     |     |                    |     |     |     |                        |     |     |      |           |     |     |     |        |     |     |     |        |  |  |  |
|          |                         | Unterarm   |     |     |     |                    |     |     |     |                        |     |     |      |           |     |     |     |        |     |     |     |        |  |  |  |
|          |                         | Ellenbogen |     |     |     |                    |     |     |     |                        |     |     |      |           |     |     |     |        |     |     |     |        |  |  |  |
|          |                         | Oberarm    |     |     |     |                    |     |     |     |                        |     |     |      |           |     |     |     |        |     |     |     |        |  |  |  |

1) Berührungsstelle. 2) Umgebung der Berührungsstelle.

empfinde ich den Druck am stärksten bei dem 3. Finger, bei dem 2. und 4. weniger und bei dem 1. und 5. am wenigsten; dagegen empfinde ich Berührung und ebenso Vibration am stärksten im 1. und 5. Finger, weniger stark im 2. und 4. Finger und am wenigsten stark im 3. Finger.

Wenn ich mit 1., 3. und 5. Finger das Brett mit 1000 g drücke, bemerke ich keine Vibration im 3. Finger, während sie im 1. und 5. Finger stark auftritt.

In den Schemata der beiden oben genannten Vpn. sind lediglich die Beobachtungen betr. den *dritten Finger* dargestellt. Man sieht, dasz bei 0 g Druck (blosze Berührung) in der Haut an der Berührungsstelle selbst die Vibrationsempfindung am stärksten ist. Vp. R. spürt auch etwas um die Berührungsstelle herum. Vp. de B. O. empfindet eine Ausstrahlung nach der Fingerwurzel und in 2. und 4. Finger. Bei 100 g Druck nimmt die Vibrationsempfindung in der Haut an der Berührungsstelle ab, es wird mehr Vibration gespürt in der Umgebung. Überdies strahlt bei Vp. de B. O. die Vibration durch den 3. Finger aus nach dem Handteller, bei Vp. R. nach den beiden nebenliegenden Fingern. Man sieht weiter, dasz bei kräftigerem Druck die Vibrationsempfindung aus der Haut an der Berührungsstelle verschwindet, nach der Umgebung wandert und sich weit durch Hand und Arm fortpflanzt. Bei Vp. de B. O. erreicht sie sogar den Ellenbogen.

Man sieht also, *dasz bei diesen Vpn. die kräftigste Vibrationsempfindung bei zunehmendem Fingerdruck auf den vibrierenden Gegenstand nach bestimmten Teilen von Hand und Arm wandert, die in einer gewissen Entfernung von der Berührungsstelle liegen.* Die Beobachtungen an den beiden anderen Fingern bestätigen dieses Ergebnis.

Die Beobachtungen über Lokalisation und Intensität der Vibrationsempfindung, die sämtliche 8 Vpn. machten, sind in der nebenstehenden Zifferntabelle vereinigt. Hier haben wir wieder lediglich schwache und starke Vibrationsempfindung unterschieden. Die Ziffern geben die Anzahl der Vpn. wieder, die an der betr. Stelle starke (grosze Ziffer) oder schwache (kleine Ziffer) Vibrationsempfindungen lokalisierten. Diese Tabelle lehrt, dasz die kräftige Vibrationsempfindung der Haut an der Berührungsstelle zwischen 100 und 200 g Druck schwindet, und dasz sie selbst bei höheren Druckwerten nicht mehr zum Vorschein kommt. Bei 100 g Druck empfinden 4 Vpn. kräftiges Vibrieren in der Umgebung der Berührungsstelle. Im Gebiet der Fingerwurzeln und des Handtellers werden die Zahlen schon niedriger. Bei 500 bis 600 g Druck empfinden nur noch 3 Vpn. kräftiges Vibrieren in der Umgebung der Berührungsstelle, und nicht mehr an der Berührungsstelle selbst. Dagegen werden die Zahlen für die Felder der Hand viel höher. Danach, bei höheren Druckwerten, nehmen die Zahlen für die Felder der Finger sehr stark ab, viel weniger stark nehmen die Zahlen für die Felder der Hand ab. Aus den Beobachtungen der Vpn. geht nämlich hervor, dasz bei diesen hohen Druckwerten ein völlig anderer Faktor die Vibrationsempfindung beeinflusst. In den Beobachtungen wird dieser Faktor umschrieben als:



Anzahl der Vpn., die an verschiedenen Stellen von Hand und Arm Vibrationsempfindungen lokalisierten. (Starke Vibrationsempfindungen in grossen, schwache Vibrationsempfindungen in kleinen Ziffern).

| Lokalisationsstelle          |                                  | Druck auf den vibrierenden Gegenstand (in g.) |                |                |                |                |                |                |                |                |
|------------------------------|----------------------------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
|                              |                                  | 0   | 100            | 200            | 300            | 400            | 500—600        | 800—900        | 1000           | 1200           |
| Endglied                     | a. Berührungsstelle              | 8   | 4 <sub>3</sub> | 4              | 2              | 2              |                |                |                |                |
| 3. Finger                    | b. Umgebung der Berührungsstelle | 2 <sub>3</sub>                                | 6 <sub>2</sub> | 7 <sub>1</sub> | 4 <sub>2</sub> | 4 <sub>4</sub> | 3 <sub>4</sub> | 6              | 1 <sub>4</sub> | 3              |
| 3. Finger                    | 2. Glied                         | 4   | 6 <sub>2</sub> | 7 <sub>1</sub> | 6              | 6 <sub>2</sub> | 4 <sub>3</sub> | 1 <sub>6</sub> | 1 <sub>4</sub> | 1 <sub>3</sub> |
| 3. Finger                    | 1. Glied                         | 4   | 5 <sub>3</sub> | 7 <sub>1</sub> | 6              | 6 <sub>2</sub> | 5 <sub>2</sub> | 2 <sub>5</sub> | 1 <sub>4</sub> | 2 <sub>3</sub> |
| 2 Finger                     | 1. Glied                         | 4   | 3 <sub>3</sub> | 4 <sub>1</sub> | 3 <sub>1</sub> | 2 <sub>2</sub> | 2 <sub>1</sub> | 2              | 1 <sub>1</sub> | 2              |
| 2. Finger                    | 2. Glied                         | 3   | 2 <sub>4</sub> | 3 <sub>2</sub> | 3 <sub>2</sub> | 2 <sub>2</sub> | 2 <sub>1</sub> | 1              | 5              | 2              |
| 2. Finger                    | 3. Glied                         | 1 <sub>1</sub>                                | 1 <sub>2</sub> | 2 <sub>2</sub> | 2 <sub>2</sub> | 1 <sub>2</sub> | 1 <sub>2</sub> |                | 2              | 1              |
| 4. Finger                    | 1. Glied                         | 2   | 2 <sub>4</sub> | 2 <sub>1</sub> | 4              | 5              | 4 <sub>1</sub> | 1 <sub>2</sub> | 3              | 1 <sub>1</sub> |
| 4. Finger                    | 2. Glied                         | 2   | 1 <sub>5</sub> | 3 <sub>1</sub> | 3 <sub>1</sub> | 4 <sub>1</sub> | 4 <sub>1</sub> | 1 <sub>1</sub> | 3              | 1 <sub>1</sub> |
| 4. Finger                    | 3. Glied                         | 2   | 1 <sub>2</sub> | 1 <sub>2</sub> | 1 <sub>2</sub> | 3 <sub>1</sub> | 1 <sub>3</sub> | 1              | 3              | 1 <sub>1</sub> |
| 1. Finger                    | 1. Glied (Daumen)                | 3   | 1 <sub>2</sub> | 2 <sub>1</sub> | 1 <sub>1</sub> | 3 <sub>1</sub> | 2 <sub>1</sub> | 1 <sub>2</sub> | 1 <sub>2</sub> | 2 <sub>1</sub> |
| 1. Finger                    | 2. Glied                         | 2   | 1 <sub>1</sub> | 1 <sub>1</sub> | 1              | 3 <sub>1</sub> | 2              | 1 <sub>1</sub> | 1 <sub>2</sub> | 2              |
| 5. Finger                    | 1. Glied                         | 2   | 1 <sub>3</sub> | 1 <sub>2</sub> | 1 <sub>1</sub> | 3 <sub>1</sub> | 1 <sub>2</sub> | 1 <sub>2</sub> | 3              | 2              |
| 5. Finger                    | 2. Glied                         | 2   | 2 <sub>2</sub> | 1 <sub>2</sub> | 1              | 2 <sub>2</sub> | 1 <sub>2</sub> | 2              | 3              | 2              |
| 5. Finger                    | 3. Glied                         | 1   | 1 <sub>3</sub> | 1 <sub>1</sub> | 1              | 2 <sub>2</sub> | 1 <sub>1</sub> | 1              | 1              | 2              |
| Regio metacarpo-phalangealis |                                  | 4   | 5 <sub>3</sub> | 8              | 6              | 8              | 7              | 6 <sub>2</sub> | 3 <sub>1</sub> | 4              |
| Palmae manus, centralis pars |                                  | 1   | 5 <sub>2</sub> | 3              | 5 <sub>1</sub> | 7              | 6              | 6 <sub>1</sub> | 2 <sub>1</sub> | 4              |
| Thenar                       |                                  | 1   | 1 <sub>1</sub> | 3 <sub>1</sub> | 5              | 5              | 3 <sub>1</sub> | 6 <sub>1</sub> | 2              | 3              |
| Hypothenar                   |                                  | 1   | 2 <sub>2</sub> | 4              | 6              | 4              | 4              | 6 <sub>1</sub> | 1 <sub>1</sub> | 3              |
| Regio inter thenares         |                                  | 1   | 2 <sub>2</sub> | 5 <sub>1</sub> | 5 <sub>1</sub> | 4 <sub>1</sub> | 6              | 6 <sub>2</sub> | 2 <sub>1</sub> | 4              |
| Carpus                       |                                  | 1   | 2              | 5 <sub>1</sub> | 4 <sub>1</sub> | 5 <sub>1</sub> | 6              | 6 <sub>2</sub> | 3 <sub>1</sub> | 3              |
| Unterarm                     |                                  |   | 1 <sub>1</sub> | 4 <sub>1</sub> | 4              | 5 <sub>1</sub> | 6              | 6 <sub>1</sub> | 3 <sub>1</sub> | 3              |
| Ellenbogen                   |                                  |   | 1              | 1 <sub>1</sub> | 2              | 3              | 5 <sub>1</sub> | 4 <sub>1</sub> | 4              | 2              |
| Oberarm                      |                                  |   |                | 1              | 1              | 1              | 3              | 3 <sub>1</sub> | 3              | 1              |

Ermüdung, Spannungsgefühl, und selbst als eine neue Art Vibration, eine eigenartige, aus dem Körper selbst hervorkommende Vibration, grob und unregelmäßig, die mit jener Vibration interferiert, die von auszen her an den Körper kommt. (Wahrscheinlich ist dies die eigene Ermüdungsvibration, 5—8 p. sec.) Es ist deutlich, dass die auftretenden Spannungs- bzw. Druckempfindungen bei diesen hohen Druckwerten sehr lebendig zum Bewusstsein kommen, und dass sie die Wahrnehmung der von auszen kommenden Vibration gänzlich verdrängen können. Dies erklärt genügend das Abnehmen der Zahlen bei den hohen Druckwerten. Die Funktionen der Druckempfindung und der Vibrationsempfindung sind hier sehr deutlich geschieden — ein Tatbestand, der gegen alle Hypothesen spricht, die eine Identität von Druck- und Vibrationssinn behaupten. An Hand der zusammenfassenden Zifferntabelle (S. 9) kann man ebenfalls visuelle Feld-Schemata von Arm und Hand zusammenstellen. Drei dieser Schemata werden hier wiedergegeben, nämlich die Werte für 0 g, 200 g und 800/900 g Druck, den 3. Finger und alle 8 Vpn. (Schemata 3, 4, 5). In diesen Schemata erkennt man auf den ersten Blick die Gesetzmäßigkeit: *Bei zunehmendem Druck auf einen vibrierenden Gegenstand wandert die intensivste Vibrationsempfindung nach Körperteilen, die in einem gewissen Abstände von dem vibrierenden Objekt oder der Berührungsstelle liegen.*

Schema 3. Lokalisation der Vibrationsempfindungen bei 0 g Druck nach den Aussagen von 8 Vpn.

Gereizt: 3. Finger. — ● = stärkere, ○ = schwächere Vibrationsempfindung je einer Vp.

|                    |   | 5. Finger.               |  |  |  | 4. Finger. |   |  |  | 3. Finger.<br>nur Endglied |   |   |   | 2. Finger.                           |   |   |   | Daumen |   |  |   |
|--------------------|---|--------------------------|--|--|--|------------|---|--|--|----------------------------|---|---|---|--------------------------------------|---|---|---|--------|---|--|---|
|                    |   |                          |  |  |  |            |   |  |  | Berührungs<br>Stelle       |   |   |   | Umgebung<br>der Berührungs<br>Stelle |   |   |   |        |   |  |   |
| Endglied           | ○ |                          |  |  |  | ○          | ○ |  |  | ●                          | ● | ● | ● | ○                                    | ○ | ○ |   | ○      | ● |  |   |
| Mittleres<br>Glied | ○ | ○                        |  |  |  | ○          | ○ |  |  |                            | ○ | ○ | ○ |                                      |   |   | ○ | ○      |   |  | ○ |
| Erstes<br>Glied    | ○ | ○                        |  |  |  | ○          | ○ |  |  |                            | ○ | ○ | ○ |                                      |   |   | ○ | ○      |   |  | ○ |
|                    |   | regio metacarpo phalang. |  |  |  |            |   |  |  | ○ ○ ○ ○                    |   |   |   |                                      |   |   |   |        |   |  |   |
| hypothenar         | ○ | palma                    |  |  |  |            |   |  |  | ○                          |   |   |   | manus                                |   |   |   | ○      |   |  |   |
|                    |   | regio interthenares      |  |  |  |            |   |  |  | ○                          |   |   |   |                                      |   |   |   | thenar |   |  |   |
|                    |   | Puls.                    |  |  |  |            |   |  |  |                            |   |   |   |                                      |   |   |   |        |   |  |   |
|                    |   | Unterarm.                |  |  |  |            |   |  |  |                            |   |   |   |                                      |   |   |   |        |   |  |   |
|                    |   | Ellenbogen.              |  |  |  |            |   |  |  |                            |   |   |   |                                      |   |   |   |        |   |  |   |
|                    |   | Oberarm.                 |  |  |  |            |   |  |  |                            |   |   |   |                                      |   |   |   |        |   |  |   |



Schema 4. Lokalisation der Vibrationsempfindungen bei 200 g Druck nach den Aussagen von 8 Vpn.

Gereizt: 3. Finger. — ● = stärkere, ○ = schwächere Vibrationsempfindung je einer Vp.

| 5. Finger. |  |  |  | 3. Finger.<br>nur Endglied |  |   |  | 2. Finger. |  |  |  |
|------------|--|--|--|----------------------------|--|---|--|------------|--|--|--|
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |
|            |  |  |  | Berührungs<br>Stelle       |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |            |  |  |  |
| 5. Finger. |  |  |  | 4. Finger.                 |  |   |  | 3. Finger. |  |  |  |

Schema 5. Lokalisation der Vibrationsempfindungen bei 800/900 g Druck nach den Aussagen von 8 Vpn.

Gereizt: 3. Finger. ● = stärkere, ○ = schwächere Vibrationsempfindung je einer Vp.

|                      |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 3. Finger                |   |  |  |    |   |  |  |  |  |                      |   |   |   |  |   |  |  |  |    |              |  |        |  |     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|----------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--------------------------|---|--|--|----|---|--|--|--|--|----------------------|---|---|---|--|---|--|--|--|----|--------------|--|--------|--|-----|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|                      |  |  |  |  |  |  |  |  |  | nur Endglied             |   |  |  |    |   |  |  |  |  |                      |   |   |   |  |   |  |  |  |    |              |  |        |  |     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 5. Finger            |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 4. Finger                |   |  |  |    |   |  |  |  |  | Berührungs<br>Stelle |   |   |   |  | Umgebung<br>der<br>Berührungs<br>Stelle |  |  |  |    | 2. Finger    |  |        |  |     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Endglied             |  |  |  |  |  |  |  |  |  | ●                        |   |  |  | ●  |   |  |  |  |  |                      | ○ | ○ | ○ |  |   |  |  |  |    |              |  | Daumen |  |     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Mittleres<br>Glieder |  |  |  |  |  |  |  |  |  | ●●                       |   |  |  | ●○ |   |  |  |  |  | ○                    | ○ | ○ |   |  |   |  |  |  | ●  |              |  |        |  | ○●  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Erstes<br>Glieder    |  |  |  |  |  |  |  |  |  | ●○                       | ○ |  |  | ●○ | ○ |  |  |  |  | ○                    | ○ | ○ |   |  |   |  |  |  | ○○ |              |  |        |  | ○●● |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|                      |  |  |  |  |  |  |  |  |  | regio metacarpo-phalang. |   |  |  |    |   |  |  |  |  | ○●●●<br>○●●●         |   |   |   |  |   |  |  |  |    |              |  |        |  |     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ●●●●<br>●●●○         |  |  |  |  |  |  |  |  |  | palma manus.             |   |  |  |    |   |  |  |  |  | ●●●●<br>○●●●         |   |   |   |  |   |  |  |  |    | ○●●●<br>●●●● |  |        |  |     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| hypothenar           |  |  |  |  |  |  |  |  |  | regio inter thenares     |   |  |  |    |   |  |  |  |  | ○●●●<br>○●●●         |   |   |   |  |   |  |  |  |    | thenar       |  |        |  |     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|                      |  |  |  |  |  |  |  |  |  | Puls                     |   |  |  |    |   |  |  |  |  | ○●●●<br>○●●●         |   |   |   |  |   |  |  |  |    |              |  |        |  |     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|                      |  |  |  |  |  |  |  |  |  | Unterarm                 |   |  |  |    |   |  |  |  |  | ●●●●<br>○●●●         |   |   |   |  |   |  |  |  |    |              |  |        |  |     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|                      |  |  |  |  |  |  |  |  |  | Ellenbogen               |   |  |  |    |   |  |  |  |  | ○●●●<br>○●●●         |   |   |   |  |   |  |  |  |    |              |  |        |  |     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|                      |  |  |  |  |  |  |  |  |  | Oberarm                  |   |  |  |    |   |  |  |  |  | ○●●●<br>●●●●         |   |   |   |  |   |  |  |  |    |              |  |        |  |     |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

In den Beobachtungsprotokollen steht diese Gesetzmäßigkeit im Vordergrund. Daneben finden wir eine Anzahl bisher unbekannter oder wenig bekannter Phänomene, die gegenwärtig genauer untersucht werden. In den mitgeteilten Beobachtungsprotokollen tritt z.B. die interessante Tatsache auf, dasz die Vp. die sogenannte Widerstandsempfindung gänzlich verliert; sie meint dann, dasz die Vibration des Gegenstandes, auf dem der Finger ruht, in dem Körper der Vp. selbst entstehe. Der Gegenstand scheint einen Teil des Körpers der Vp. selbst zu bilden. Der Vibrationssinn ist also in diesem Falle kein „Fernsinn“, wie KATZ ihn nennt. Ebenfalls wird deutlich, dasz in der Haut, die unter einem gewissen Druck steht, Vibrationswahrnehmung nicht mehr möglich ist. Die Untersuchung dieser neuen und belangreichen Tatsachen soll weiter verfolgt werden.

---